2次曲線の解説

更新日付2016年10月17日

☆2次曲線の方程式:極方程式と直交座標

平面上の点$P(x,y)$、焦点$O(0,0)$、準線$x=a$,Pから準線への垂線をPHとする。

次の式を満たすPの軌跡を2次曲線という。$\frac{OP}{PH}=e$ (一定)…①

①を極座標(r,θ)による極方程式で表す。($r<0$の時は$(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)$とする。)

x軸上の正の点をXとして、$r=OP$,$\theta=\angle XOP$,$L=ea$とおくと①は

$\frac{OP}{PH}=\frac{r}{a-x}=e\to r=e(a-x)=ea-ex=L-er\cos\theta\to r=\frac{L}{1+e\cos\theta}$…②

これを直交座標に変換する。$r=\sqrt{x^2+y^2}$と$r=L-ex$からrを消去し、

$p=1-e^2$…③とおくと $px^2+2eLx+y^2=L^2$…④

p=1−e²≠0の時 ④をxについて平方完成してpで両辺を割ると$\left(x+\frac{eL}{p}\right)^2+\frac{y^2}{p}=\frac{L^2}{p^2}$

$A=\frac{L}{|p|}$, $B=\sqrt{|p|}A$, $F=\frac{eL}{p}=eA$ とおくと $(x\pm F)^2+\frac{y^2}{p}=A^2\Rightarrow\frac{(x\pm F)^2}{A^2}\pm\frac{y^2}{B^2}=1$…⑤

$F^2=A^2\mp B^2$が成立。グラフをx軸方向へ$\pm F$ だけ平行移動すると、 $\frac{x^2}{A^2}\pm\frac{y^2}{B^2}=1$

⑤式中の±は$p=1-e^2$の符号と同じである。焦点の座標は $F_1(-F,0)$, $F_2(F,0)$

$e=\frac{F}{A}$は離心率と呼ばれ、長軸上の焦点の位置の割合を表す。

p=1−e²=0の時 ④から$F=\frac{L}{2}$とおくと$e=1\wedge y^2=-2Lx+L^2=-2L\left(x-\frac{L}{2}\right)=-4F(x-F)$

方程式は放物線を表す。グラフをx軸方向へ$-F$平行移動$\Rightarrow y^2=-4Fx$焦点$F_1(-F,0)$

$p=1-e^2>0\Rightarrow 0<e<1$の時、方程式は楕円を表し、$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ $(A^2=F^2+B^2)$

$p=1-e^2<0\Rightarrow 1<e$ の時、方程式は双曲線を表し、$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ $(F^2=A^2+B^2)$

$1<e$より$1+e\cos\theta=0$となる$\theta=\theta_0$が存在する 。これが漸近線とx軸のなす角と一致する。

$p=1-e^2=0\Rightarrow e=1$の時、方程式は放物線を表し、$y^2=-4Fx$

放物線の性質 $e=1$の時 $y^2=4Fx$となり放物線の式となる。…①

反射の法則 ①を微分すると、$\frac{dy}{dx}=\frac{2F}{y}$より放物線上の点$P(x_0,y_0)$での法線の方程式は

$y=-\frac{y_0}{2F}x+\frac{(2Fy_0+x_0y_0)}{2F}$これと$x$軸との交点は$N(x_0+2F,0)$,焦点の座標 $F_1(F,0)$

$F_1P^2=(F-x_0)^2+y_0^2=F^2-2x_0F+x_0^2+4Fx_0=F^2+2x_0F+x_0^2=(F+x_0)^2$

$F_1N^2=(2F+x_0-F)^2=(F+x_0)^2$よって$\triangle F_1PN$ は$F_1P=F_1N$の2等辺三角形である。

$\angle F_1PN=\angle F_1NP$…②

Pを通り、x軸に平行な直線上に点Aをx軸の正の方向にとれば$\angle F_1NP=\angle NPA$…③

②③より$\angle F_1PN=\angle NPA$

よって法線PNは$\angle F_1PA$を2等分し、物理の反射の法則が成立。

楕円・双曲線の性質 2次曲線上の点を$P(x,y)$, $e\neq 1$の時は2つの焦点F_1, F_2が存在する。F_kに対する準線を$l_k, (k=1,2)$とし、線分F_1F_2のF_2方向の延長線上に点Xをとる。

楕円の性質

$F_1P+F_2P=$一定の証明

$e=\dfrac{F_1P}{PH_1}=\dfrac{F_2P}{PH_2}$より

$F_1P+F_2P=e(PH_1+PH_2)=eH_1H_2=$一定

直交座標による証明は

$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1\Rightarrow y^2=B^2-\dfrac{B^2}{A^2}x^2$,

$F^2=A^2-B^2\Rightarrow F<A\cdots$①

$F_1P=\sqrt{(x+F)^2+y^2}, F_2P=\sqrt{(x-F)^2+y^2}$

$\sqrt{(x\pm F)^2+y^2}=\sqrt{x^2\pm 2xF+F^2+y^2}$

$=\sqrt{A^2\pm 2xF+\dfrac{(A^2-B^2)}{A^2}x^2}$

$=\sqrt{A^2\pm 2\mathrm{xF}+(\dfrac{Fx}{A})^2}=\sqrt{(A\pm\dfrac{Fx}{A})^2}=\left|A\pm\dfrac{Fx}{A}\right|$

$(|x|<A\wedge$①より$\pm Fx<F|x|<A^2$より$)$

$=A\pm\dfrac{Fx}{A}$よって$F_1P+F_2P=2\mathrm{A}$

$F_1P+F_2P=$一定となるPの軌跡

$2A=F_1P+F_2P, 2F=F_1F_2$とおくと

$\triangle F_1F_2P$と三角不等式から$A>F\cdots$②

$\theta=\angle XF_2P, r=F_2P$とおくと$F_1P=2\mathrm{A}-r$

$\Rightarrow(2A-r)^2=r^2+(2F)^2-2r(2F)\cos(\pi-\theta)$

$\Rightarrow A^2-F^2=r(A+F\cos\theta)$(余弦定理から)

$e=F/A, a=(A^2-F^2)/(eA)$とおくと②より

$0<e<1, a>0, ea=r(1+e\cos\theta)$

これは楕円の極方程式である。

反射の法則 楕円の式から$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{B^2x}{A^2y}$

楕円上の点$P(x_0,y_0)$の法線は

$y=\dfrac{A^2y_0}{B^2x_0}x-\dfrac{(A^2-B^2)}{B^2}y_0$

x軸との交点$N((F^2/A^2)x_0, 0)$

$F_1N=F+\dfrac{F^2}{A^2}x_0=\dfrac{F}{A}(A+\dfrac{Fx_0}{A})=\dfrac{F}{A}F_1P$

$F_2N=F-\dfrac{F^2}{A^2}x_0=\dfrac{F}{A}(A-\dfrac{Fx_0}{A})=\dfrac{F}{A}F_2P$

$\Rightarrow F_1N:F_2N=F_1P:F_2P$

双曲線の性質

$F_1P-F_2P=$一定の証明

$e=\dfrac{F_1P}{PH_1}=\dfrac{F_2P}{PH_2}$より

$F_1P-F_2P=e(PH_1-PH_2)=eH_1H_2=$一定

直交座標による証明は

$\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1, (x>A)\Rightarrow y^2=\dfrac{B^2}{A^2}x^2-B^2$

$F^2=A^2+B^2\Rightarrow F>A\cdots$③

$F_1P=\sqrt{(x+F)^2+y^2}, F_2P=\sqrt{(x-F)^2+y^2}$

$\sqrt{(x\pm F)^2+y^2}=\sqrt{x^2\pm 2\mathrm{xF}+F^2+y^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(A^2+B^2)}{A^2}x^2\pm 2\mathrm{xF}+A^2}$

$=\sqrt{(\dfrac{Fx}{A})^2\pm 2\mathrm{xF}+A^2}=\sqrt{(\dfrac{Fx}{A})^2\pm A}=\left|\dfrac{Fx}{A}\pm A\right|$

$(A<x$かつ②より$A^2<Fx)$

$=\dfrac{Fx}{A}\pm A$よって$F_1P-F_2P=2\mathrm{A}$

l

$F_1P-F_2P=$一定となるPの軌跡

$2A=F_2P-F_1P, 2F=F_1F_2$とおくと

$\triangle F_1F_2P$と三角不等式から$A<F\cdots$④

$\theta=\angle XF_1P, r=F_1P$とおくと$F_2P=2\mathrm{A}+r$

$(2A+r)^2=r^2+(2F)^2-2r(2F)\cos\theta$

$\Rightarrow r(A+F\cos\theta)=F^2-A^2$(余弦定理から)

$e=F/A, a=(F^2-A^2)/(eA)$とおくと④より

$1<e, a>0, ea=r(1+e\cos\theta)$

これは双曲線の極方程式である。

反射の法則 双曲線の式から$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B^2x}{A^2y}$

双曲線上の点$P(x_0,y_0)(x_0>A)$の法線は

$y=-\dfrac{y_0A^2}{x_0B^2}x+\dfrac{(A^2+B^2)}{B^2}y_0$

x軸との交点は$N((F^2/A^2)x_0, 0)$

$F_1N=\dfrac{F^2}{A^2}x_0+F=\dfrac{F}{A}(\dfrac{Fx_0}{A}+A)=\dfrac{F}{A}F_1P$

$F_2N=\dfrac{F^2}{A^2}x_0-F=\dfrac{F}{A}(\dfrac{Fx_0}{A}-A)=\dfrac{F}{A}F_2P$

$F_1N:F_2N=F_1P:F_2P$

法線PNは$\angle F_1PF_2$の外角を2等分。物理の反射の法則が成立する。

楕円・双曲線の極限としての放物線

楕円双曲線の方程式を、ある条件の元で$e\to 1$の極限をとると放物線の方程式になる。

楕円の極限としての放物線

楕円の左側の焦点が原点にくるように
x軸方向にFだけ平行移動する。

$$\frac{(x-F)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

$D=A-F=$一定とする。

$B=\sqrt{1-e^2}\,A,\ F=e\,A$

$\to A=\dfrac{D}{1-e},\ B=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,D$

楕円の方程式に代入して

$y^2=(e^2-1)x^2+2e(1+e)Dx+(1+e)^2D^2\cdots$①

双曲線の極限としての放物線

双曲線の左側の焦点が原点にくるように
x軸方向に$-F$だけ平行移動する。

$$\frac{(x+F)^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$

$D=F-A=$一定とする。

$B=\sqrt{e^2-1}\,A,\ F=e\,A$

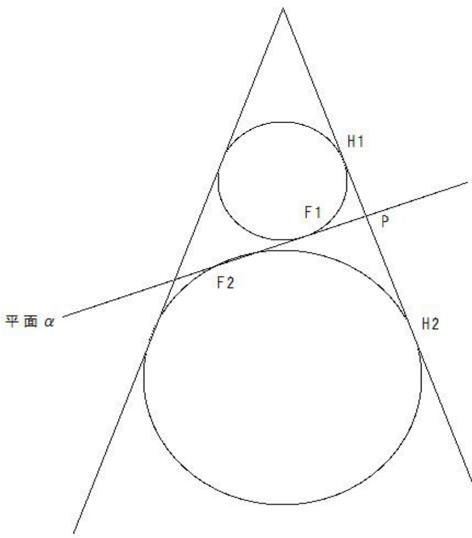
$\to A=\dfrac{D}{e-1},\ B=\sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\,D$

双曲線の方程式に代入して

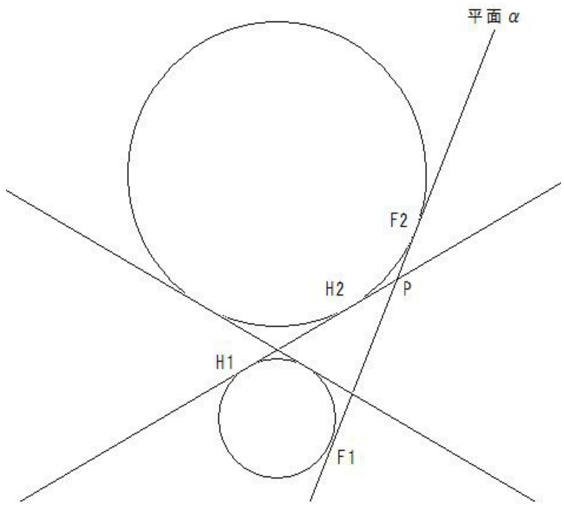
$y^2=(e^2-1)x^2+2e(1+e)Dx+(1+e)^2D^2\cdots$②

ここで$e\to 1$の極限を取ると①②ともに$y^2=4\mathrm{D}\,x+4D^2$

円錐の断面の図形としての2次曲線



左図は円錐と平面αの交わる様子である。
円錐と平面に接する球を描き、
平面αとの接点を$F_{1,}F_2$とする。
平面と円錐との交わる曲線上の点P
$\Rightarrow F1\,P+F2\,P=H_1P+H_2P=H_1H_2=$一定
よって交わる曲線は楕円である。



右図は円錐と平面αの交わる様子である。
円錐と平面に接する球を描き、
平面αとの接点を$F_{1,}F_2$とする。
平面と円錐との交わる曲線上の点P
$\Rightarrow F1\,P-F2\,P=H_1P-H_2P=H_1H_2=$一定
よって交わる曲線は双曲線である。