三角形の五心の存在証明

更新日 2016 年 12 月 27 日

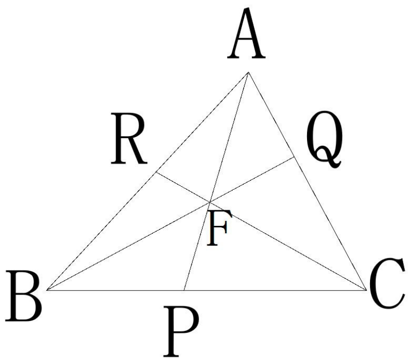
中学数学で、三角形の外心や内心を作図するが、他に重心、垂心、傍心があり、合わせて三角形の 5 心と呼ばれる。三角形上の 3 本の直線が 1 点で交わることで現われるこれらの点の存在を証明することがこの稿の目的である。使うのは「チェバの定理の逆」と呼ばれる定理だが、参考として初めに「チェバの定理」を紹介しよう。

以下の説明では、点 P, Q, R はそれぞれ三角形の頂点 A, B, C に向かい合う辺 BC, CA, AB 上にある。

チェバの定理

三角形ABCにおいて BC上の点をP、CA上の点をQ、AB上の点をR とする。

AP, BQ, CR が1点で交わるならば $\dfrac{AR}{RB}\dfrac{BP}{PC}\dfrac{CQ}{QA}=1$



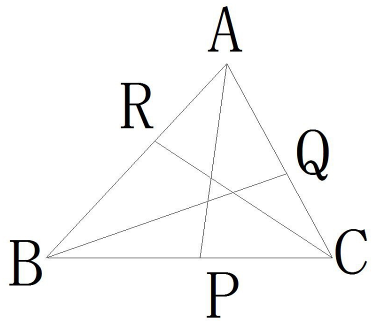
証明 AP, BQ, CR の交点を F とする。

$\triangle FCA : \triangle FBC = AR : RB$

$\triangle FAB : \triangle FCA = BP : PC$ より

$\triangle FBC : \triangle FAB = CQ : QA$

$$\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}=\frac{\triangle FCA}{\triangle FBC}\frac{\triangle FAB}{\triangle FCA}\frac{\triangle FBC}{\triangle FAB}=1$$



チェバの定理の逆

三角形ABCにおいて BC上の点をP、CA上の点をQ、AB上の点をR とする。

$\dfrac{AR}{RB}\dfrac{BP}{PC}\dfrac{CQ}{QA}=1 \cdots ①$

ならば直線 AP, BQ, CR は一点で交わる。

証明 ①より $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{RB}{AR}\dfrac{QA}{CQ}$

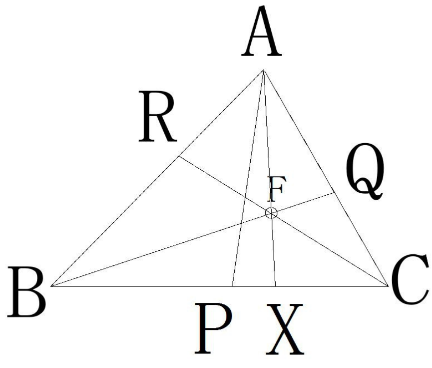
BQ と CR の交点を F とし、その延長線と BC の交点を X とする。

X, Q, R についてはチェバの定理が成立する。

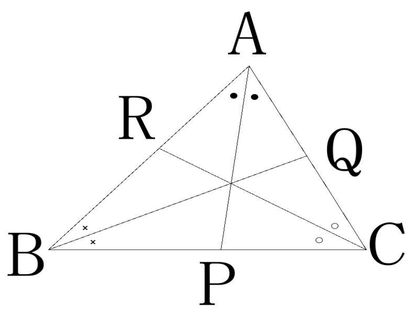
$\dfrac{AR}{RB}\dfrac{BX}{XC}\dfrac{CQ}{QA}=1 \Rightarrow \dfrac{BX}{XC}=\dfrac{RB}{AR}\dfrac{QA}{CQ}=\dfrac{BP}{PC}$

$\Rightarrow BX : XC = BP : PC$

$\Rightarrow X, P$ ともに BC の同じ比による内分点(外分点)だから一致する。よって AP, BQ, CR は一点で交わる。



Copyright (C) 2016 Yuuichi Takaku All Rights Reserved.



内心の存在証明

$\angle A$の内角2等分線とBCの交点をP

$\angle B$の内角2等分線とCAの交点をQ

$\angle C$の内角2等分線とABの交点をR

内角2等分線の性質から

$BP:PC=AB:AC$

$CQ:QA=BC:AB$

$AR:RB=AC:BC$

$$\Rightarrow \frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\frac{BC}{AB}\frac{AC}{BC}=1$$

傍心の存在証明

$\angle A$の外角2等分線とBCの交点をP

$\angle B$の内角2等分線とCAの交点をQ

$\angle C$の外角2等分線とABの交点をR

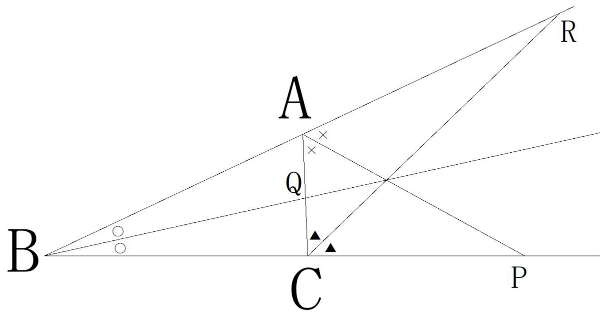
内外角2等分線の性質から

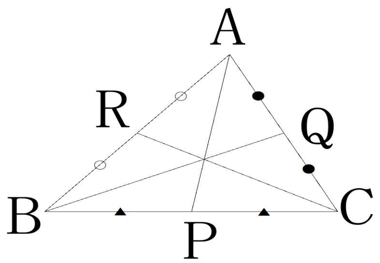
$BP:PC=AB:AC$

$CQ:QA=BC:AB$

$AR:RB=AC:BC$

$$\Rightarrow \frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\frac{BC}{AB}\frac{AC}{BC}=1$$





重心の存在証明

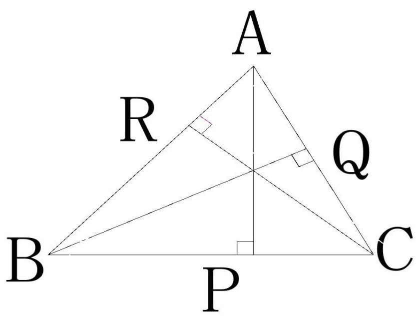
BCの中点をP

CAの中点をQ

ABの中点をR

$$\Rightarrow \frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{RB}=1$$

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB}=1$$



垂心の存在証明

AからBCへの垂線AP

BからCAへの垂線BQ

CからABへの垂線CR

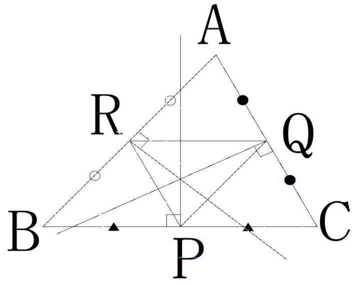
$$\begin{aligned} &BP=AB\cos B \wedge PC=AC\cos C \\ \Rightarrow\ &CQ=BC\cos C \wedge QA=AB\cos A \\ &AR=AC\cos A \wedge RB=BC\cos B \end{aligned}$$

$$\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA}\frac{AR}{RB}=\frac{AB\cos B}{AC\cos C}\frac{BC\cos C}{AB\cos A}\frac{AC\cos A}{BC\cos B}=1$$

外心の存在証明

図より△PQR の垂心が存在し、

それは△ABC の外心でもある。



Copyright (C) 2016 Yuuichi Takaku All Rights Reserved.