

ボーア理論とX線の発生

X線は紫外線より、波長が短いので、 $E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$

より、高エネルギーとなる。発生装置は右図の通り。

フィラメントは、直接接続されている電池により、約2000度の高温になる。そこから電子がエネルギーを得てターゲットに向けて飛び出す。

電子がターゲットに当たるときに $\frac{1}{2}mv^2=eV$

のエネルギーをもつ。衝突後、そのエネルギーはX線のエネルギー $h\nu$ と熱 Q に変わる。

$$eV=h\nu+Q=\frac{hc}{\lambda}+Q \rightarrow \lambda=\frac{hc}{eV-Q}$$

$Q \geq 0$ より $\lambda \geq \frac{hc}{eV}$ の範囲を取る。最小波長は $\lambda_0=\frac{hc}{eV}$ 各 λ のX線光子の個数がX線の強さになる。

ボーア理論（ボーアの水素原子モデル）

高校物理の水素原子モデルでは、原子核を円の中心として半径 r の円周上を電子が等速円運動する。次の(1)～(4)の式から計算を始める。

この時の向心力は原子核と電子の間のクーロン力である。 $m\frac{v^2}{r}=k\frac{e^2}{r^2} \rightarrow mv^2=k\frac{e^2}{r}$ (1)

電子の力学的エネルギーは $U=\frac{1}{2}mv^2-k\frac{e^2}{r}$ (2)

電子の運動量と電子の物質波の関係式は $mv=\frac{h}{\lambda}$ (3)

この時、電子の物質波による定常波が円周上にできる。 $2\pi r=n\lambda$ (4)

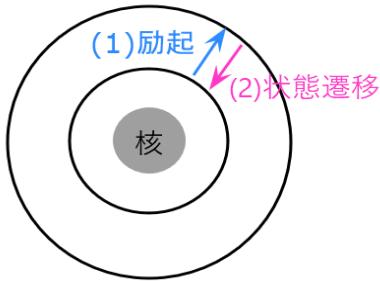
(3)(4)から λ 消去 $\rightarrow mv=\frac{hn}{2\pi r}$ これと(1)から v を消去 $k\frac{e^2}{r}=\frac{1}{m}(mv)^2=\frac{h^2n^2}{4\pi^2mr^2} \rightarrow r=\frac{h^2}{4\pi^2mke^2}n^2$ (5)

(2)に(1)を代入 $\rightarrow U=-\frac{ke^2}{2r}$ さらに(5)を代入すると $E_n=U=-\frac{2\pi^2k^2me^4}{h^2}\frac{1}{n^2}$ (6)

水素放電管の線スペクトル

水素放電管とは水素を低圧で封入した管に電極を装着したもので、これに高電圧をかけると、水素が発光する。この光を、分光器で分光すると、連続スペクトル以外に多数の線スペクトルが観測できる。この線スペクトルの波長を λ とすると以下の表の式が成立する。ここで、Rはリュードベリ定数($1.10 \times 10^7 m^{-1}$)である。

系列名	バルマー系列	ライマン系列	パッセン系列について
波長領域	可視光領域	紫外光領域	赤外光領域
式	$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)(n \geq 3)$	$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)(n \geq 2)$	$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)(n \geq 4)$
発見年代	1885年	1906年	1908年



- (1)励起状態 放電により、電子が低いエネルギーの電子殻から高いエネルギーの電子殻に移動する。
 (2)状態遷移 励起した電子が元の電子殻に戻る。
 この時、電子殻間のエネルギーの差が $E = h\nu$ の関係により、線スペクトルとなる。

これを式にすると $E_n - E_m = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ これと(6)により

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} (E_n - E_m) = -\frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$\pi = 3.14$

$$k = 8.99 \times 10^9 N \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} kg$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} C$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$$

$$c = 3.00 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$$

$$\text{を代入して有効数字3ヶタにすると } R_1 = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^3 c} = 1.09 \times 10^7 m^{-1}$$

これはリュードベリ定数 $R = 1.10 \times 10^7$ とほぼ一致する。

アルカリ金属の線スペクトル

アルカリ金属やアルカリ土類金属の金属塩を炎に入れると、気化した金属原子から炎色反応が現われる。この時の線スペクトルを輝線スペクトルという。1890年 リュードベリにより、次の式にまとめられた。

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2} \right) \quad (m, n = \text{整数} \quad a, b \text{ は元素に固有の定数である})$$

X線への応用

フィラメントからの熱電子が金属原子中の電子を突き飛ばしたとき、空いた電子殻にその外側の電子殻から電子が移動する。その時の力学的エネルギー(エネルギー準位という)の差がX線のエネルギーとなる。

$$E_m - E_n = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow E_m - E_n \text{ が大きければ } \lambda \text{ は小さくなる。小さければ } \lambda \text{ は大きくなる。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{hc} (E_n - E_m) = -\frac{2\pi^2 k^2 e^2 m e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{(n+b)^2} - \frac{1}{(m+a)^2} \right) = \frac{2\pi^2 k^2 e^2 m e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2} \right) \\ &= R \left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } R = \frac{2\pi^2 k^2 e^2 m e^4}{h^3 c} = 1.09 \times 10^7 \text{ となるのは水素原子の場合と同様である。}$$