

フーリエ級数

A. 数学的基礎

A1. 三角関数の直交性

$$I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt dt = \begin{cases} 2\pi & (m=n=0) \\ \pi & (m=n \neq 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad J_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt = \begin{cases} 2\pi & (m=n=0) \\ \pi & (m=n \neq 0) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$K_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos nt dt = 0$$

[計算 1] $\sin m(-t) \cos n(-t) = -\sin mt \cos nt$ より奇関数だから $K_{m,n} = 0$

$$[計算 2] \quad I_{0,0} = J_{0,0} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$$

[計算 3] n が $n \neq 0$ なる整数の時

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = \frac{1}{n} [\sin nt]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = \frac{1}{n} [-\cos nt]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (-(-1)^n + (-1)^n) = 0 \quad \dots (1-1)$$

$$n > 0 \text{ の時 } (1-1) \text{ より } I_{0,n} = I_{n,0} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = 0 \quad J_{0,n} = J_{n,0} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt dt = 0$$

[計算 4]

$$m+n > 0 \text{ の時 } (1-1) \text{ より } 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt \cos nt - \sin mt \sin nt) dt$$

$$\rightarrow I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt dt = J_{m,n}$$

積和と積差の公式
$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad \text{より}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$I_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)t + \cos(m-n)t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(0+2\pi) & (m=n) \\ \frac{1}{2}(0+0) & (m \neq n) \end{cases} = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

A2. 複素数と共役 a, b は実数、 i は虚数 ($i^2 = -1$)、 $z = a + bi$ は複素数であり、共役 $\bar{z} = a - bi$ 、実部 $\Re(z) = a$ 、虚部 $\Im(z) = b$ $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$, $z\bar{z} = |z|^2$

A3. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

加法定理より

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Leftrightarrow (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

... (3-1)

(応用)

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \Leftrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i \Im(e^{i\theta}) = 2i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow e^{i\theta} - 1 = e^{\frac{i\theta}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = (e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}) e^{\frac{i\theta}{2}} = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} \Leftrightarrow e^{i\alpha} - e^{i\beta} = (e^{i(\alpha - \beta)} - 1) e^{i\beta} = 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{\frac{\alpha - \beta}{2}} e^{i\beta} = 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2} e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

A4. 関数(ディリクレ核) $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \rightarrow E_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ と定義する。

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \cdots(4-1) \quad E_n(t) = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \quad \cdots(4-2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \pi \quad \cdots(4-3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} E_n(t) dt = n\pi \quad \cdots(4-4)$$

[計算1] 次の式を導く

$$\sum_{k=1}^n (e^{it})^{k-1} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(n-1)t}{2}} \quad \cdots(1) \quad \sum_{k=1}^n (e^{ikt}) = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \quad \cdots(2)$$

等比数列の和の公式と(3-1)から $\sum_{k=1}^n (e^{it})^{k-1} = \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{2i\sin\frac{nt}{2} e^{i\frac{nt}{2}}}{2i\sin\frac{t}{2} e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(n-1)t}{2}} \rightarrow (1)$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^n e^{ikt} = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = e^{it} \sum_{k=1}^n (e^{it})^{k-1} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(n-1)t}{2}} e^{it} = \frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \rightarrow (2)$$

[計算2]

(3-1)より(4-3)分子式は $\sin\frac{nt}{2} e^{i\frac{(n+1)t}{2}} = \frac{1}{2i} (2i\sin\frac{nt}{2} e^{i\frac{nt}{2}}) e^{i\frac{t}{2}} = -\frac{i}{2} (e^{int} - 1) e^{i\frac{t}{2}} = -\frac{i}{2} (e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i\frac{t}{2}})$

$$\therefore \sum_{k=1}^n e^{ikt} = \frac{i}{2} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta - \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} \quad \text{実部の相当性から} \quad \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$

以上を整理して $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \rightarrow (4-1)$

[計算3] 積差公式 $\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$ より $\sin(k+\frac{1}{2})t \sin\frac{t}{2} = \frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{2}$

$\rightarrow$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t \sin\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{2} = \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \frac{1 - \cos nt}{2} = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \rightarrow (4-2)$$

(1-1)より $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = \frac{2\pi}{2} + 0 = \pi \rightarrow (4-3) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} E_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) dt = n\pi$

[計算4] 直交性から $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \cos k(t) dt = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi & (1 \leq k \leq n) \\ 0 & k > n \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \sin kt dt = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \cos^2 kt \right) dt = \frac{1}{4} 2\pi + n\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\therefore E_{2n+1}(t) = \sum_{k=0}^{2n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{2n+1-1} D_k(t) = 2 \frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})t}{(2\sin\frac{t}{2})^2} = 2D_n^2(t)$$

B.フーリエ級数

B1.微分積分学 フーリエ級数の収束の証明において大学課程の微分積分学の定理を使っている。

(1) 数列 a_n が単調増加かつ有界ならば収束する。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(3) 数列 a_n が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$

(4) $f(x)$ は閉区間で連続ならば積分可能かつ有界かつ一様連続。

●ある $M > 0$ が存在して、すべての x について $|f(x)| \leq M$

●すべての $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し[すべての x について $|h| < \delta \rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$]

(6) 関数が微分可能なら連続である。

(7) $f_n(x)$ が積分可能かつ一様収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

(8) 閉区間 $[a, b]$ で連続な $f(x)$ が $f(x) \geq 0$ かつ $\int_a^b f(x) dx = 0$ ならば恒等式 $f(x) = 0$

[(8) の証明] $a \leq x \leq b$ とする。 $f(x) \geq 0$ より

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = 0 \rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 \rightarrow f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = 0$$

B2.フーリエ級数の定義

実数全体で定義された $f(x)$ について次の条件をこの稿において終始仮定する。

●周期 2π を持つ。つまりすべての実数 x と整数 n について $f(x + 2n\pi) = f(x)$

●任意の閉区間で積分可能。

この時、フーリエ級数 $c_n(x)$ を次式で定義する。

$$(n \geq 0) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad c_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \cdots (B-1)$$

B3.関数 $f(x)$ についての条件

● $f(x)$ が微分可能でその導関数が連続な時、「なめらか」という。

●閉区間内の $f(x)$ の不連続な x が有限個であり、それを $x_1, x_2, \dots, x_n$ とする。

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{と定義した記号のもとで}$$

$k=1, 2, \dots, n$ で $f(x_k-0)$, $f(x_k+0)$ が存在するならば、 $f(x)$ は「区分的に連続」という。

●閉区間内で導関数が区分的に連続ならば、 $f(x)'$ $f(x)$ を「区分的になめらか」という。

B4.フーリエ級数の収束

● $f(x)$ が周期 2π かつ、区分的になめらかな関数ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \text{ で連続} \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & x \text{ で不連続} \end{cases}$

● $f(x)$ が周期 2π をもち、閉区間 $[-\pi, \pi]$ で連続ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x) = f(x)$ (一様収束)

[証明STEP] フーリエ級数の収束を次の段階で証明する。

STEP-1 $f(x)$ が周期 2π かつ積分可能ならば $\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ (積分区間のスライド)

STEP-2 $f(x)$ が周期 2π かつ積分可能ならば $c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du$

STEP-2 $f(x)$ が周期 2π かつ積分可能ならば $c_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) D_n(t) dt$

STEP-4 $f(x)$ が周期 2π かつ積分可能ならば $\int_{-\pi}^{\pi} c_n(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx$

STEP-5 $f(x)$ が周期 2π かつ積分可能ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$ は収束する。

これより[リーマン・ルベークの定理] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = 0$

STEP-6 $f(x)$ が閉区間 $[-\pi, \pi]$ でなめらかならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = f(x)$ (フーリエ級数の収束)

STEP-7 $f(x)$ が閉区間 $[-\pi, \pi]$ で区分的になめらかならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

STEP-8 $f(x)$ が閉区間 $[-\pi, \pi]$ で連続ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x) = f(x)$ (一様収束)

[STEP-1 証明] 2π の周期性から $\int_{\pi+a-2\pi}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{\pi-2\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x) dx$

$$\rightarrow \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

[STEP-2 証明] $n \geq 1$ の時

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-x) dt$$

$$\therefore c_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos n(t-x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

$$u = t - x \text{ の変数変換と[STEP-1]により } = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du$$

[STEP-3 証明] $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$ より $c_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) D_n(t) dt$ (B-2)

[STEP-4 証明] 定義から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) c_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned} \quad \dots(1)$$

三角関数の直交性から

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^n \left(a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt + b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt \right) \\ &= \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 2\pi + \sum_{k=1}^n (a_k^2 \pi + b_k^2 \pi) = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \end{aligned} \quad \dots(2)$$

$$(1) (2) \text{ から } \int_{-\pi}^{\pi} c_n(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

[STEP-5] $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$ は単調増加。

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_n(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) c_n(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \text{ [ベッセルの不等式]} \rightarrow A_n \text{ は有界}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(t) dt = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) \text{ は収束する。} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = 0 \quad \text{[リーマン・ルベークの定理]}$$

[STEP-6 証明] 次のリーマン・ルベーグの定理を使う。

$$f(x) \text{ が周期 } 2\pi \text{ かつ積分可能ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) \cos \frac{t}{2}\right) \sin nt \, dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \sin \frac{t}{2}\right) \cos nx \, dt = 0$$

$f(x)$ がなめらか。すなわち微分可能でその導関数が連続とする。 $F_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ と定義して

$$c_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} F_x(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt$$

$F_x(t)$ は $t(t \neq 0)$ について連続である。 $F_x(0)$ は未定義だが、 $f(x)$ の微分可能性からこれを

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = f(x)' \times 1 \quad \text{で定義すれば } t=0 \text{ でも連続。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n(x) - f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_x(t) \sin nt \, dt = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = f(x)$$

[STEP-7 証明]

不連続点にまで拡張するために $F_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) & (t \neq 0) \\ \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) & (t = 0) \end{cases}$ と定義する。

$f(x+0), f(x-0)$ は極限值であり、代入ではないことに注意する。

x が $f(x)$ の不連続点でも $f(x)$ が区分的になめらかなので、 $t \neq 0$ において $F_x(t)$ はなめらか。

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_x(t) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = F_x(0) \quad t=0 \text{ で } F_x(t) \text{ は連続。}$$

$$F_x(t)' = \frac{1}{2}(f'(x+t) + f'(x-t)) \quad \lim_{h \rightarrow 0+} f(x+h)' = f(x+0)' \quad \lim_{h \rightarrow 0-} f(x+h)' = f(x-0)' \text{ より}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_x(t)' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}(f'(x+t) + f'(x-t)) = \frac{1}{2}(f'(x+0) + f'(x-0)) = F_x(0)' \quad t=0 \text{ で } F_x(t)' \text{ も連続。}$$

$$\rightarrow t=0 \text{ においても } F_x(t) \text{ はなめらか。よって STEP-6 により } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_x(t+0) D_n(t) \, dt = F_x(0)$$

$$F_x(-t) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)) = F_x(t) \text{ より } t \text{ に関して偶関数である。}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_x(t) D_n(t) \, dt = 2 \int_0^{\pi} F_x(t) D_n(t) \, dt = \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt + \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t) \, dt$$

変数変換 $t = -u$ より $D_n(t)$ が偶関数だから

$$\int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t) \, dt = - \int_0^{-\pi} f(x+u) D_n(-u) \, du = \int_{-\pi}^0 f(x+u) D_n(u) \, du$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_x(t) D_n(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_x(t+0) D_n(t) \, dt = F_x(0) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

[STEP-8 証明] $S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k$ とする。

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \sum_{k=0}^{n-1} D_n(t) dt = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) E_n(t) dt$$

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_n(t) dt = 1 \quad \text{より} \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) E_n(t) dt$$

$f(x)$ は閉区間で連続だから一様連続。

すべての $\varepsilon > 0$ に対して x に無関係にある $\delta > 0$ が定まり $|t| < \delta$ ならば $|f(t+x) - f(x)| < \varepsilon$]
積分区間を $[-\pi, \pi] = \{t \mid |t| < \delta\} \cup \{t \mid |t| \geq \delta\}$ に分割して

$$P = \int_{|t| < \delta} (f(t+x) - f(x)) E_n(t) dt \quad Q = \int_{|t| \geq \delta} (f(t+x) - f(x)) E_n(t) dt \quad \text{とおく。} \quad E_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \geq 0 \quad \text{だから}$$

$$|P| = \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(t+x) - f(x)) E_n(t) dt \right| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(t+x) - f(x)| E_n(t) dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon E_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} E_n(t) dt = n\pi \varepsilon$$

$f(x)$ は閉区間で連続だから有界であり、 $|f(x)| < M$ となる M が存在する。

$$|t| \geq \delta \quad \text{の時} \quad \sin^2 \frac{t}{2} \geq \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad \text{かつ} \quad \sin^2 \frac{(n+1)t}{2} \leq 1 \quad \text{より} \quad E_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$|Q| = \int_{|t| \geq \delta} |(f(t+x) - f(x))| E_n(t) dt \leq \int_{|t| \geq \delta} M \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} dt = 2 \int_{\delta}^{\pi} \frac{M}{2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} dt = \frac{M(\pi - \delta)}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\pi} (|P| + |Q|) \leq \frac{1}{n\pi} \left(n\pi \varepsilon + \frac{M(\pi - \delta)}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) \leq \varepsilon + \frac{1}{n} \frac{M(\pi - \delta)}{\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \text{これは } x \text{ に無関係に成立。}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ (一様収束)

[試論としての補足計算] $c_n(x)$ が一様収束するならば微分可能性の仮定がなくても $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = f(x)$ が成立。

$f(x)$ の連続性や積分可能性だけでは一様収束を結論できない。

$$\text{STEP-4 より} \quad \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} c_k(x) f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} c_k^2(x) dx \quad \cdots(1)$$

$$\text{STEP-5 より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n(x) dx \text{ は収束するから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} c_k^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx \quad \cdots(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) \text{ が一様収束だから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \quad \cdots(3)$$

$$(1)(2)(3) \text{より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx \quad \cdots(4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) c_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx \quad \cdots(5)$$

$$(4)(5) \text{より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n^2(x) dx = 0$$

$$\text{ここで } c_n(x) \text{ の一様収束を仮定すれば} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - c_n(x))^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_n(x))^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - c_n(x))^2 dx = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_n(x))^2 dx = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(x) = f(x)$$