

常微分方程式の初期値問題

$\frac{d}{d x} y(x)=f(x, y(x)) \quad, \quad y\left(x_0\right)=y_0$

Runge の 1 / 6 公式	Kutta の 1 / 8 公式
$k_1=f\left(x, y_i\right)$ $k_2=f\left(x+\frac{1}{2} h, y_i+\frac{h}{2} k_1\right)$ $k_3=f\left(x+\frac{1}{2} h, y_i+\frac{h}{2} k_2\right)$ $k_4=f\left(x+h, y_i+h k_3\right)$ $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}\left(k_1+2 k_2+2 k_3+k_4\right)$	$k_1=f\left(x, y_i\right)$ $k_2=f\left(x+\frac{1}{3} h, y_i+\frac{h}{3} k_1\right)$ $k_3=f\left(x+\frac{2}{3} h, y_i+\frac{h}{3}\left(3 k_2-k_1\right)\right)$ $k_4=f\left(x+h, y_i+h\left(k_3-k_2+k_1\right)\right)$ $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{8}\left(k_1+3 k_2+3 k_3+k_4\right)$

上記の公式を総称して Runge-Kutta (R-K) の公式という。

Runge-Kutta (R-K) の公式の一般形

$k_1=f\left(x, y\right)$
 $k_2=f\left(x+a_2 h, y+b_{21} k_1 h\right)$
 $k_3=f\left(x+a_3 h, y+\left(b_{31} k_1+b_{32} k_2\right) h\right)$
 $k_4=f\left(x+a_4 h, y+\left(b_{41} k_1+b_{42} k_2+b_{43} k_3\right) h\right)$
(☆) $y(x+h)=y(x)+\left(u_1 k_1+u_2 k_2+u_3 k_3+u_4 k_4\right) h+O\left(h^5\right)$

(☆)を満たす実数(パラメータ) $u_i(i=1,2,3,4)$, $a_i(i=2,3,4)$, $b_{ij}(i=2,3,4, j=1,2,\cdots i-1)$ を定め、
 $\bar{y}=y(x)+\left(u_1 k_1+u_2 k_2+u_3 k_3+u_4 k_4\right) h$ を $y(x+h)$ の近似解とする。

$f(x, y)$ は 3 回以上偏微分可能で、 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ を仮定する。

定義

$x_i(h)=x+a_i h$, $y_i=y_i(h)=y+h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j \quad(i=1,2,3,4)$ (ただし $a_1=0$, $\sum_{j=1}^0=0$)
 $k_i=k_i(h)=f\left(x_i(h), y_i(h)\right) \quad(i=1,2,3,4)$

結果

(D1) $k_i(0)=f(x, y)=k_1$, $y_i(0)=y$

微分する変数によって、次の違いがある。

(D2) $\frac{d}{d h} k_1=\frac{d}{d h} f(x, y(x))=0$
(D3) $\frac{d}{d x} k_1=\frac{d}{d x} f(x, y(x))=\left(\frac{\partial}{\partial x}+y'(x) \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y(x))=\left(\frac{\partial}{\partial x}+f(x, y(x)) \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y(x))$

(☆)の解析のため微分積分学の結果を応用する。

●合成関数の微分

$f(x, y)$ が全微分可能で $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ が偏微分可能である時

$F(u, v)=f(x(u, v), y(u, v))$ は u, v について偏微分可能で

$$\frac{\partial F}{\partial u}=f_x(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}+f_y(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=f_x(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}+f_y(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}$$

これは $F=f(x, y)$ とおいて、 $\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$ (連鎖律)とも表す。

$f(x, y)$ が全微分可能で、 $x=x(t)$, $y=y(t)$ が区間 I で微分可能な時、連鎖律により

$F(t)=f(x(t), y(t))$ は区間 I で微分可能で $\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ (合成関数の微分)

● t を変数に含む線形作用素

$x=x(t)$, $y=y(t)$, $f=f(x(t), y(t))$ とする。 $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ は t についての n 階導関数を表す。

$\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ は $x^{(n)}(t)$, $y^{(n)}(t)$ に対して線形性の係数のように作用する。

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{(n)}(t)f(x, y))=x^{(n)}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^{(n)}(t)f(x, y))=x^{(n)}(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\right)$$

$$, \quad \frac{\partial}{\partial x}(y^{(n)}(t)f(x, y))=y^{(n)}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}(y^{(n)}(t)f(x, y))=y^{(n)}(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\right)$$

定義

$$D_t^{(n)} = x^{(n)}\frac{\partial}{\partial x}+y^{(n)}\frac{\partial}{\partial y}, \quad D_t^n=\sum_{i=0}^n {}_nC_i\left(x^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-i}\left(y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y}\right)^i \quad (D_t, D_t^{(n)} \text{ は } t \text{ を変数に含む。})$$

$$X=\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{とおくと} \quad D_t^{(n)}=x^{(n)}X+y^{(n)}Y, \quad D_t^n=\sum_{i=0}^n {}_nC_i(x^{(1)}X)^{n-i}(y^{(1)}Y)^i$$

結果

$$(A1) \quad D_t^{(n)} \text{ は線形作用素で } D_t^{(n)}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}D_t^{(n)}, \quad D_t^{(n)}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}D_t^{(n)}, \quad D_t^{(i)}D_t^{(j)}=D_t^{(j)}D_t^{(i)}$$

$$(A2) \quad D_t^{(1)}=D_t$$

$$(A3) \quad D_t^n D_t = D_t^{n+1}$$

$$(A4) \quad \left(\frac{d}{dt}D_t^{(n)}\right)f=D_t^{(n+1)}f$$

証明

$$(A1) \quad a, b \text{ を定数, } g=g(x(t), y(t)), \text{ 偏微分の線形性から } D_t^{(n)}(af+bg) = aD_t^{(n)}f+bD_t^{(n)}g$$

→ $D_t^{(n)}$ は線形作用素。 $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial y}$ の可換性および $x(t)$, $y(t)$ に対する線形性により成立する。

$$(A2) \quad D_t^{(1)}=x^{(1)}X+y^{(1)}Y, \quad D_t=D_t^1=\sum_{i=0}^1 {}_1C_i(x^{(1)}X)^{1-i}(y^{(1)}Y)^i = x^{(1)}X+y^{(1)}Y \rightarrow D_t^{(1)}=D_t$$

$$(A3) \quad \bar{X}=x^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \bar{Y}=y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{とおくと} \quad D_t^n=\sum_{i=0}^n {}_nC_i\bar{X}^{n-i}\bar{Y}^i, \quad D_t=\bar{X}+\bar{Y}$$

$$D_t^n D_t = \sum_{i=0}^n {}_nC_i\bar{X}^{n-i}\bar{Y}^i(\bar{X}+\bar{Y}) = \sum_{i=0}^n {}_nC_i\bar{X}^{n+1-i}\bar{Y}^i + \sum_{i=0}^n {}_nC_i\bar{X}^{n-i}\bar{Y}^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^n {}_nC_i\bar{X}^{n+1-i}\bar{Y}^i + \sum_{i=1}^{n+1} {}_nC_{i-1}\bar{X}^{n-(i-1)}\bar{Y}^i = \bar{X}^{n+1} + \sum_{i=1}^n ({}_nC_i + {}_nC_{i-1})\bar{X}^{n+1-i}\bar{Y}^i + \bar{Y}^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} {}_{n+1}C_i\bar{X}^{n+1-i}\bar{Y}^i$$

$$= D_t^{n+1}$$

(証明終わり)

● t による D_t の微分

$$(B1) \quad \frac{d}{dt}(D_t^{(n)} f) = \left(\frac{d}{dt} D_t^{(n)} \right) f + D_t^{(n)} \left(\frac{d}{dt} f \right)$$

$$(B2) \quad \frac{d}{dt} f = D_t f$$

$$(B3) \quad \frac{d}{dt}(D_t^{(n)} f) = (D_t^{(n+1)} + D_t^{(n)} D_t) f$$

$$(B4) \quad \frac{d}{dt}(D_t^n f) = (D_t^{n+1} + n D_t^{(2)} D_t^{n-1}) f$$

$$(B5) \quad \frac{d}{dt}(D_t^{(i)} D_t^{(j)} f) = (D_t^{(i+1)} D_t^{(j)} + D_t^{(i)} D_t^{(j+1)} + D_t^{(i)} D_t^{(j)} D_t) f$$

$$(B6) \quad \frac{d^2}{dt^2} f = (D_t^2 + D_t^{(2)}) f$$

$$(B7) \quad \frac{d^3}{dt^3} f = (D_t^3 + 3 D_t^{(2)} D_t + D_t^{(3)}) f$$

証明

$$(B2) \text{ 合成関数の微分により } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (x^{(1)} X + y^{(1)} Y) f = D_t f$$

(B3) (B2)は f を f_x , f_y に置き換えても成立するから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(D_t^{(n)} f) &= \frac{d}{dt}(x^{(n)} f_x + y^{(n)} f_y) = \frac{d}{dt}(x^{(n)} f_x) + \frac{d}{dt}(y^{(n)} f_y) \\ &= \left(\frac{d}{dt} x^{(n)} \right) f_x + x^{(n)} \frac{d}{dt} f_x + \left(\frac{d}{dt} y^{(n)} \right) f_y + y^{(n)} \frac{d}{dt} f_y = x^{(n+1)} f_x + y^{(n+1)} f_y + x^{(n)} D_t f_x + y^{(n)} D_t f_y \\ &= (x^{(n+1)} X + y^{(n+1)} Y) f + (x^{(n)} D_t X + y^{(n)} D_t Y) f = D_t^{(n+1)} f + (x^{(n)} X D_t + y^{(n)} Y D_t) f \\ &= D_t^{(n+1)} f + (x^{(n)} X + y^{(n)} Y) D_t f = (D_t^{(n+1)} + D_t^{(n)} D_t) f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B1) (B3) \quad \frac{d}{dt}(D_t^{(n)} f) &= (D_t^{(n+1)} + D_t^{(n)} D_t) f \quad \text{かつ} (A4) \quad D_t^{(n+1)} f = \left(\frac{d}{dt} D_t^{(n)} \right) f \quad \text{かつ} (B2) \quad D_t f = \frac{d}{dt} f \\ \rightarrow \frac{d}{dt}(D_t^{(n)} f) &= \left(\frac{d}{dt} D_t^{(n)} \right) f + D_t^{(n)} \left(\frac{d}{dt} f \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B5) (B1) \text{により} \quad \frac{d}{dt}(D_t^{(i)} D_t^{(j)} f) &= \left(\frac{d}{dt} D_t^{(i)} \right) (D_t^{(j)} f) + D_t^{(i)} \frac{d}{dt}(D_t^{(j)} f) \\ &= D_t^{(i+1)} (D_t^{(j)} f) + D_t^{(i)} \left(\left(\frac{d}{dt} D_t^{(j)} \right) f + D_t^{(j)} \left(\frac{d}{dt} f \right) \right) \\ &= D_t^{(i+1)} (D_t^{(j)} f) + D_t^{(i)} (D_t^{(j+1)} f + D_t^{(j)} (D_t f)) \\ &= (D_t^{(i+1)} D_t^{(j)} + D_t^{(i)} D_t^{(j+1)} + D_t^{(i)} D_t^{(j)} D_t) f \end{aligned}$$

(B4) $g_{n,i} = X^{n-i} Y^i f$ とおく。

$$g_{n,i} = X^{n-i} Y^i f = X (X^{n-1-i} Y^i f) = X g_{n-1,i}$$

$$g_{n,i} = X^{n-i} Y^i f = Y (X^{(n-1)-(i-1)} Y^{i-1} f) = Y g_{n-1,i-1}$$

$$D_t^n f = \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)} X)^{n-i} (y^{(1)} Y)^i f = \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i g_{n,i}$$

$$\begin{aligned}
& {}_n C_i i = {}_n C_{i-1} C_{i-1} \quad , \quad {}_n C_i (n-i) = {}_n C_{i-1} C_i \quad \text{より} \\
& \frac{d}{dt} (D_t^n f) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i g_{n,i} = \sum_{i=0}^n {}_n C_i \frac{d}{dt} \left((x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i g_{n,i} \right) \\
& = \sum_{i=0}^n {}_n C_i \left(\frac{d}{dt} (x^{(1)})^{n-i} \right) (y^{(1)})^i g_{n,i} + (x^{(1)})^{n-i} \left(\frac{d}{dt} (y^{(1)})^i \right) g_{n,i} + (x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i \frac{d}{dt} g_{n,i} \\
& = \sum_{i=0}^n {}_n C_i (n-i) (x^{(1)})^{n-i-1} x^{(2)} (y^{(1)})^i g_{n,i} + \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)})^{n-i} i (y^{(1)})^{i-1} y^{(2)} g_{n,i} + \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i D_t g_{n,i} \\
& = n x^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^{n-1} {}_n C_i (x^{(1)})^{n-1-i} (y^{(1)})^i g_{n-1,i} \\
& + n y^{(2)} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n {}_n C_{i-1} (x^{(1)})^{n-1-(i-1)} (y^{(1)})^{i-1} g_{n-1,i-1} \\
& + D_t \sum_{i=0}^n {}_n C_i (x^{(1)})^{n-i} (y^{(1)})^i g_{n,i} \\
& = n x^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} D_t^{n-1} f + n y^{(2)} \frac{\partial}{\partial y} D_t^{n-1} f + D_t^n D_t f \\
& = \left(n (x^{(2)} X + y^{(2)} Y) D_t^{n-1} + D_t^{n+1} \right) f = (n D_t^{(2)} D_t^{(n-1)} + D_t^{n+1}) f
\end{aligned}$$

$$(B6) \quad \frac{d^2}{dt^2} f = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f \right) = \frac{d}{dt} (D_t f) = \frac{d}{dt} (D_t^{(1)} f) = (D_t^{(2)} + D_t^{(1)} D_t) f = (D_t^{(2)} + D_t^2) f$$

$$\begin{aligned}
(B7) \quad \frac{d^3}{dt^3} f &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} f \right) = \frac{d}{dt} (D_t^{(2)} f + D_t^2 f) = \frac{d}{dt} (D_t^{(2)} f) + \frac{d}{dt} (D_t^2 f) \\
&= (D_t^{(3)} + D_t^{(2)} D_t) f + (D_t^3 + 2 D_t^{(2)} D_t) f = (D_t^3 + 3 D_t^{(2)} D_t + D_t^{(3)}) f
\end{aligned}$$

(証明終わり)

● $x(t) = x + ht$ (x と t は互いに独立)の時

$$(C1) \quad D_t = D_t^{(1)} = h X + y^{(1)} Y$$

$$(C2) \quad D_t^{(2)} = y^{(2)} Y$$

$$(C3) \quad D_t^{(3)} = y^{(3)} Y$$

$$(C4) \quad \frac{d^2}{dt^2} f = (D_t^2 + D_t^{(2)}) f = (D_t^2 + y^{(2)} Y) f$$

$$(C5) \quad \frac{d^3}{dt^3} f = (D_t^3 + 3 D_t^{(2)} D_t + D_t^{(3)}) f = (D_t^3 + 3 y^{(2)} D_t Y + y^{(3)} Y) f$$

●パラメータの方程式

(☆)の左辺を x による微分でテーラー展開すると

$$[(\star)\text{の左辺}] = y(x+h) = y(x) + \sum_{n=1}^4 \frac{y^{(n)}(x)}{n!} h^n + O(h^5) \quad (LR1)$$

(☆)の右辺を h による微分でテーラー展開すると

$$\begin{aligned}
& \text{補題 [1]より } (h u_i k_i(h))^{(n)} = u_i (n k_i^{(n-1)}(h) + h k_i^{(n)}(h)) = n u_i k_i^{(n-1)}(h) + h u_i k_i^{(n)}(h) \quad \text{だから} \\
& [(\star)\text{の右辺}] = \sum_{i=1}^4 u_i k_i h = \sum_{i=1}^4 \left\{ 0 + \sum_{n=1}^4 \frac{n u_i k_i^{(n-1)}(0)}{n!} h^n \right\} + O(h^5) = \sum_{n=1}^4 \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{n u_i k_i^{(n-1)}(0)}{n!} h^n \right\} + O(h^5) \quad (LR2)
\end{aligned}$$

$$(LR1)(LR2)\text{より } (\star)\text{は } \sum_{n=1}^4 \frac{y^{(n)}(x)}{n!} h^n = \sum_{n=1}^4 \left\{ \sum_{i=1}^4 \frac{n u_i k_i^{(n-1)}(0)}{n!} h^n \right\} + O(h^5)$$

$$\text{各係数を等しいとおくと } y^{(n)}(x) = n \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(n-1)}(0) \quad (n=1, 2, 3, 4) \quad (LR3)$$

●(LR3)の左辺について

$F^{(n)}$ は x についての n 階導関数を表す。 $f=k_1=f(x, y(x))$ とおく。

線形作用素を以下に定義する。

$$D_x^{(n)} = x^{(n)} X + y^{(n)}(x) Y, \quad D_x = D_x^{(1)}, \quad D_x^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k X^{n-k} (k_1 Y)^k$$

次の結果が導かれる。

$$(L1) \quad D_x = X + k_1 Y, \quad D_x^{(n)} = y^{(n)} Y \quad (n \geq 2)$$

$$(L2) \quad y^{(1)}(x) = k_1$$

$$(L3) \quad y^{(2)}(x) = k_1^{(1)} = D_x k_1, \quad D_x^{(2)} = y^{(2)} Y = D_x k_1 Y$$

$$(L4) \quad y^{(3)}(x) = k_1^{(2)} = (D_x^2 + D_x k_1 Y) k_1, \quad D_x^{(3)} = y^{(3)} Y = D_x^2 k_1 Y + D_x k_1 Y k_1 Y$$

$$(L5) \quad y^{(4)}(x) = k_1^{(3)} = (D_x^3 + 3 D_x k_1 D_x Y + D_x^2 k_1 Y + D_x k_1 Y k_1 Y) k_1$$

証明

$$(L2) \quad y^{(1)}(x) = f(x, y(x)) = k_1$$

$$(L1) \quad D_x = D_x^{(1)} = X + y^{(1)} Y = X + k_1 Y, \quad D_x^{(n)} = y^{(n)} Y \quad (n \geq 2)$$

$$(L3) \quad (L2)(B2) \text{より} \quad y^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} y^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} k_1 = D_x k_1$$

$$(L4) \quad (L2)(C4)(L3) \text{より} \quad y^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} y^{(1)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} k_1 = (D_x^2 + y^{(2)} Y) k_1 = (D_x^2 + D_x k_1 Y) k_1$$

$$(L5) \quad (L2)(C5)(L3)(B4) \text{より} \quad y^{(4)}(x) = \frac{d^3}{dx^3} y^{(1)} = (D_x^3 + 3 y^{(2)} Y D_x + y^{(3)} Y) k_1$$

$$= D_x^3 + 3 D_x k_1 D_x Y + D_x^2 k_1 Y + D_x k_1 Y k_1 Y$$

(証明終わり)

●(LR3)の右辺について

補題 [1] $F(h)$ は h による n 階微分可能とすると $(h F(h))^{(n)} = n F^{(n-1)}(h) + h F^{(n)}(h)$

証明

$$(h F)^{(1)} = F + h F^{(1)} = 1 F^{(0)} + h F^{(1)} \text{ よって } n=1 \text{ の時正しい。}$$

$$n=k \text{ の時正しいと仮定する。 } (h F)^{(k)} = k F^{(k-1)} + h F^{(k)}$$

$$(h F)^{(k+1)} = \frac{d}{dh} (h F)^{(k)} = \frac{d}{dh} (k F^{(k-1)} + h F^{(k)}) = k F^{(k)} + F^{(k)} + h F^{(k+1)} = (k+1) F^{(k)} + h F^{(k+1)} \quad (\text{証明終わり})$$

$$F^{(n)} \text{ は } h \text{ についての } n \text{ 階導関数を表す。 } B_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \text{ とおく。規約により } B_1 = \sum_{j=1}^0 b_{1j} = 0$$

線形作用素を以下に定義する。

$$D_{i,h}^{(n)} = (a_i h)^{(n)} X + y_i^{(n)} Y, \quad D_{i,h} = D_{i,h}^{(1)}, \quad D_{i,h}^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (a_i X)^{n-k} (y_i^{(1)} Y)^k$$

結果

$$(R1) \quad y_1^{(n)}(h) = 0, \quad y_i^{(n)}(h) = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (n k_j^{(n-1)} + h k_j^{(n)}), \quad y_i^{(n)}(0) = n \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^{(n-1)}(0), \quad (n \geq 1)$$

$$(R2) \quad D_{1,h} = 0$$

$$(R3) \quad k_1^{(n)} = \frac{d^n}{dh^n} k_1 = \frac{d^n}{dh^n} f(x, y) = 0$$

$$(R4) \quad k_i^{(1)}(0) = D_{i,0} k_1$$

$$(R5) \quad k_i^{(2)}(0) = (D_{i,0}^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 Y) k_1$$

$$(R6) \quad k_i^{(3)}(0) = (D_{i,0}^3 + 6 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 D_{i,0} Y + 3 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0}^2 k_1 Y + 6 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} D_{k,0} k_1 Y) k_1$$

$$(R7) \quad D_{i,0}^n = \sum_{k=0}^n a_i^{n-k} B_{i,n}^k C_k X^{n-k} (k_1 Y)^k$$

証明

$$(R1) \text{ 規約より } y_1(h) = y + h \sum_{j=1}^0 b_{ij} k_j = y \rightarrow y_1^{(n)}(h) = \frac{d^n}{d h^n} y = 0$$

$$(R2) \text{ 定義より } D_{i,h} = a_i X + y_i^{(1)} Y \rightarrow a_1 = y_1^{(1)} = 0 \text{ より } D_{1,h} = 0$$

$$(R3) \quad k_i(0) = f(x, y) = k_1, \quad y_i(0) = y \text{ より } k_1^{(n)} = \frac{d^n}{d h^n} k_1 = \frac{d^n}{d h^n} f(x, y) = 0$$

$$(R4) \text{ (B2)より } k_i^{(1)}(h) = \frac{d}{d h} k_i = D_{i,h} k_i \rightarrow k_i^{(1)}(0) = D_{i,0} k_1$$

$$(R5) \text{ (C4)より } k_i^{(2)}(h) = \frac{d^2}{d h^2} k_i = (D_{i,h}^2 + y_i^{(2)} Y) k_i$$

$$(R1)(R4) \text{ より } y_i^{(2)}(0) = 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^{(1)}(0) = 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 \quad (R5-1)$$

$$k_i^{(2)}(0) = (D_{i,0}^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 \frac{\partial}{\partial y}) k_1$$

$$(R6) \text{ (C5)より } k_i^{(3)}(h) = \frac{d^3}{d h^3} k_i = (D_{i,h}^3 + 3 y_i^{(2)} D_{i,h} Y + y_i^{(3)} Y) k_i$$

$$(R1)(R5) \text{ より } y_i^{(3)}(0) = 3 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j^{(2)}(0) = 3 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} (D_{j,0}^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} D_{k,0}) k_1$$

$$(R5-1) \text{ より } k_i^{(3)}(0) = (D_{i,0}^3 + 3 \times 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 D_{i,0} Y + 3 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0}^2 Y + 6 \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} D_{k,0} k_1 Y) k_1$$

$$(R7) \text{ (R2)より } y_i^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_1 = B_i k_1$$

$$D_{i,0}^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (a_i X)^{n-k} (y_i^{(1)}(0) Y)^k = \sum_{k=0}^n a_i^{n-k} B_i {}_n C_k X^{n-k} (k_1 Y)^k$$

(LR3)を計算する。

補題 2 c_p, c_{pq} を実数として

$$D_x^n = \sum_i c_i D_{i,0}^n \quad \text{よらば} \quad 1 = \sum_i c_i a_i^{n-k} B_i^k, \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

$$D_x^n k_1 D_x^n = \sum_{i,j} c_{i,j} D_{i,0}^n k_1 D_{j,0}^n \quad \text{よらば} \quad 1 = \sum_{i,j} c_{i,j} a_i^{n-k} a_j^{n-l} B_i^k B_j^l \quad (k=0, 1, \dots, n, l=0, 1, \dots, n)$$

証明

$$D_x^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k X^{n-k} (k_1 Y)^k, \quad D_{i,0}^n = \sum_{k=0}^n a_i^{n-k} B_i^k {}_n C_k X^{n-k} (k_1 Y)^k \text{ より導かれる。}$$

(証明終り)

以下では二重 Σ が意味を持つように和の範囲を調整する。(例) $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{i-1} X_{ij} = \sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^{i-1} X_{ij}$

$$\bullet \quad n=1 \text{ の時 } y^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^4 u_i k_i(0) \rightarrow k_1 = \sum_{i=1}^4 u_i k_1 \rightarrow 1 = \sum_{i=1}^4 u_i \quad (RK1)$$

$$\bullet \quad n=2 \text{ の時 } y^{(2)}(x) = 2 \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(1)}(0) \rightarrow D_x k_1 = 2 \sum_{i=1}^4 u_i D_{i,0} k_1 = 2 \sum_{i=2}^4 u_i D_{i,0} k_1 \quad (D_{1,0}=0 \text{ より})$$

$$\text{補題 2 より } 1 = 2 \sum_{i=2}^4 u_i a_i^{1-k} B_i^k = 2(u_2 a_2^{1-k} B_2^k + u_3 a_3^{1-k} B_3^k + u_4 a_4^{1-k} B_4^k) \quad (k=0, 1) \quad (RK2)$$

● $n=3$ の時 $y^{(3)}(x)=3 \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(2)}(0)$

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) &= (D_x^2 + D_x k_1 Y) k_1 = D_x^2 k_1 + D_x k_1 Y k_1 \\ 3 \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(2)}(0) &= 3 \sum_{i=1}^4 u_i D_{i,0}^2 k_1 + 6 \sum_{i=1}^4 u_i \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 Y k_1 \\ &= 3 \sum_{i=2}^4 u_i D_{i,0}^2 k_1 + 6 \sum_{i=3}^4 u_i \sum_{j=2}^{i-1} b_{ij} D_{j,0} k_1 Y k_1 \quad (D_{1,0}=0 \text{ より}) \end{aligned}$$

対応する項が等しいとおくと補題2より

$$D_x^2 k_1 = 3 \sum_{i=2}^4 u_i D_{i,0}^2 k_1 \rightarrow 1 = 3 \sum_{i=2}^4 u_i a_i^{2-k} B_i^k \quad (k=0, 1, 2) \quad (\text{RK3})$$

$$D_x k_1 \frac{\partial}{\partial y} = 6 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0} k_1 \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 1 = 6 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} a_j^{1-k} B_j^k \quad (k=0, 1) \quad (\text{RK4})$$

● $n=4$ の時

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) &= 4 \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(3)}(0) = (D_x^3 + 3 D_x k_1 D_x Y + D_x^2 k_1 Y + D_x k_1 Y k_1 Y) k_1 \\ 4 \sum_{i=1}^4 u_i k_i^{(3)}(0) &= \left(4 \sum_{i=1}^4 u_i D_{i,0}^3 \right) k_1 + \left(24 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0} k_1 D_{i,0} Y \right) k_1 \\ &\quad + \left(12 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0}^2 k_1 Y \right) k_1 + \left(24 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{i-1} u_i b_{ij} \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} D_{k,0} k_1 Y \right) k_1 \\ &= \left(4 \sum_{i=2}^4 u_i D_{i,0}^3 \right) k_1 + \left(24 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0} k_1 D_{i,0} Y \right) k_1 \\ &\quad + \left(12 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0}^2 k_1 Y \right) k_1 + \left(24 \sum_{i=4}^4 \sum_{j=3}^{i-1} u_i b_{ij} \sum_{k=2}^{j-1} b_{jk} D_{k,0} k_1 Y \right) k_1 \end{aligned}$$

対応する項が等しいとおくと補題2より

$$D_x^3 k_1 = 4 \sum_{i=2}^4 u_i D_{i,0}^3 k_1 \rightarrow 1 = 4 \sum_{i=2}^4 u_i a_i^{3-k} B_i^k \quad (k=0, 1, 2, 3) \quad (\text{RK5})$$

$$D_x k_1 D_x Y = 8 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0} k_1 D_{i,0} Y \rightarrow 1 = 8 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} a_j^{1-k} a_i^{1-m} B_j^k B_i^m \quad (k=0, 1, m=0, 1) \quad (\text{RK6})$$

$$\begin{aligned} D_x^2 &= 12 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} D_{j,0}^2 \\ \rightarrow 1 &= 12 \sum_{i=3}^4 \sum_{j=2}^{i-1} u_i b_{ij} a_j^{2-k} B_j^k = 12(u_3 b_{32} a_2^{2-k} B_2^k + u_4 b_{42} a_2^{2-k} B_2^k + u_4 b_{43} a_3^{2-k} B_3^k) \quad (k=0, 1, 2) \quad (\text{RK7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x k_1 Y &= 24 \sum_{i=4}^4 \sum_{j=3}^{i-1} \sum_{k=2}^{j-1} u_i b_{ij} b_{jk} D_{k,0} k_1 Y = 24 u_4 b_{43} b_{32} D_{2,0} k_1 Y \\ \rightarrow 1 &= 24 u_4 b_{43} b_{32} a_2^{1-m} B_2^m \quad (m=0, 1) \quad (\text{RK8}) \end{aligned}$$

● $B_k \quad (k=2, 3, 4)$ の消去

$$(\text{RK8}) \text{により } u_4 b_{43} b_{32} \neq 0 \text{ から } u_4 b_{43} b_{32} (a_2 - B_2) = 0 \rightarrow a_2 = B_2 \quad (\text{RK9-1})$$

$$\begin{aligned} (\text{RK9-1}) \text{を} (\text{RK7}) \text{に代入すると } 1 &= 12(u_3 b_{32} a_2^2 + u_4 b_{42} a_2^2 + u_4 b_{43} a_3^{2-k} B_3^k) \quad (k=0, 1, 2) \\ \rightarrow u_4 b_{43} \neq 0 \text{ から } u_4 b_{43} a_3^2 &= u_4 b_{43} a_3 B_3 = u_4 b_{43} B_3^2 \rightarrow a_3^2 = a_3 B_3 = B_3^2 \\ \rightarrow (a_3 - B_3)^2 &= a_3^2 - 2 a_3 B_3 + B_3^2 = a_3^2 - 2 a_3^2 + a_3^2 = 0 \rightarrow a_3 = B_3 \quad (\text{RK9-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{R9-1})(\text{R9-2}) \text{を} (\text{RK2}) \text{に代入すると } 1 &= 2(u_2 a_2 + u_3 a_3 + u_4 a_4^{1-i} B_4^i) \quad (k=0, 1) \\ \rightarrow u_4 \neq 0 \text{ から } u_4 (a_4 - B_4) &= 0 \rightarrow a_4 = B_4 \quad (\text{RK9-3}) \end{aligned}$$

$$(\text{RK9-1})(\text{RK9-2})(\text{RK9-3}) \text{をまとめると } a_i = B_i = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \quad (i=2, 3, 4) \quad (\text{RK9})$$

●パラメータの方程式

(RK9)を(RK1)～(RK8)に代入して整理する。

$$1 = \sum_{p=1}^4 u_p \quad (\text{RK1})$$

$$1 = 2 \sum_{p=2}^4 u_p a_p \quad (\text{RK2})$$

$$1 = 3 \sum_{p=2}^4 u_p a_p^2 \quad (\text{RK3})$$

$$1 = 6 \sum_{p=3}^4 u_p \sum_{k=2}^{p-1} b_{pk} a_k \quad (\text{RK4})$$

$$1 = 4 \sum_{p=2}^4 u_p a_p^3 \quad (\text{RK5})$$

$$1 = 8 \sum_{p=3}^4 u_p a_p \sum_{k=2}^{p-1} b_{pk} a_k \quad (\text{RK6})$$

$$1 = 12 \sum_{p=3}^4 u_p \sum_{k=2}^{p-1} b_{pk} a_k^2 \quad (\text{RK7})$$

$$1 = 24 u_4 b_{43} b_{32} a_2 \quad (\text{RK8})$$

$$a_i = \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \quad (i=2, 3, 4) \quad (\text{RK9})$$

以上,方程式の数は 11 個,パラメータの数は 13 個だから, 2 つのパラメータは任意に決められる。

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_{43} = 1 \quad \text{とおくと Runge の } 1/6 \text{ 公式}$$

$$a_2 = \frac{1}{3}, \quad b_{43} = 1 \quad \text{とおくと Kutta の } 1/8 \text{ 公式}$$

●あとがき

できるだけ、わかりやすさを意識して書いたつもりであるが、やはり煩雑な印象をぬぐえない。計算の複雑さを特殊な偏微分の記号の中にブラックボックス化して整理することで、計算量を減らすことはできるが、十分に簡明とはとても言えない。

この稿では 4 次の R-K 公式を扱っているが、8 次や 9 次の R-K 型公式も公表されている。