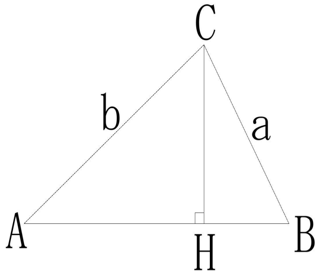
正弦定理・余弦定理から加法定理へ

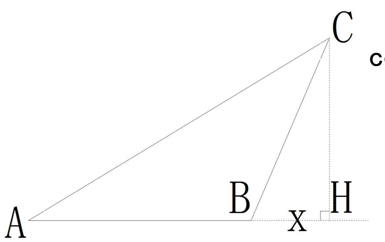
更新日 2017 年 5 月 7 日

$0<A, 0<B, A+B<180$ という条件のもとで三角関数の加法定理を証明しよう。
この稿では普通の三角形 $\triangle ABC$ と正弦定理・余弦定理を使う。座標は使わない。
$\triangle ABC$ において $\angle A$ と向かい合う辺の長さを a とし、 b, c も同様とする。
$\angle C$ から直線 AB へおろした垂線の足を H とする。

$CH = a\sin B = b\sin A \Rightarrow CH^2 = ab\sin B\sin A$ …①



H が線分 AB 上にある時、 $\angle A, \angle B$ は鋭角であり、
$\cos A>0, \cos B>0$ より $AH = b\cos A, BH = a\cos B$
$\Rightarrow c = AB = AH + BH = a\cos B + b\cos A$ …②



H が線分 AB 上にない時、 $\angle A, \angle B$ は鋭角と鈍角である。
cos A > 0 , cos B < 0とすれば $AH = b\cos A, BH = -a\cos B$
$c = AB = AH - BH = a\,cosB + b\cos A$ やはり②が成り立つ。

正弦定理から

$\sin(A+B) = \sin(180-C) = \sin C$ …③

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ より $\sin A = \dfrac{a}{c}\sin C, \sin B = \dfrac{b}{c}\sin C$ …④

②③④より

$$\sin A\cos B + \cos A\sin B = \left(\frac{a}{c}\sin C\right)\cos B + \left(\frac{b}{c}\sin C\right)\cos A = \sin C\frac{(a\cos B + b\cos A)}{c}$$
$$= \sin(A+B)$$

余弦定理から

$\cos C = \cos(180-(A+B)) = -\cos(A+B)$ より

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C = a^2+b^2+2ab\cos(A+B) \Rightarrow 2ab\cos(A+B) = c^2-a^2-b^2$ …⑤

②より $c^2 = (a\cos B + b\cos A)^2 = a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A$ ⑤に代入

$$2ab\cos(A+B) = -a^2(1-\cos^2 B) + 2ab\cos A\cos B - b^2(1-\cos^2 A)$$
$$= 2ab\cos A\cos B - a^2\sin^2 B - b^2\sin^2 A = 2ab\cos A\cos B - 2CH^2 \quad \text{(①より)}$$
$$= 2ab\cos A\cos B - 2ab\sin A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$