漸近線の求め方

更新日 2017 年 5 月 9 日

関数　$y=f(x)$　と直線　$y=ax+b$　について次の条件が成立の時、直線を漸近線という。

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

この稿では漸近線の a と b を求める方法を紹介する。

［計算法］

$y=f(x)$ とおく時、　$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$　　$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-ax)$

これは a が傾き= [y の増加量] / [x の増加量]からもわかりやすい。

(証明)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)+(ax+b)}{x}=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\left\{a+\frac{b}{x}\right\}=a$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)+b\}=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}+b=b$$

(例題 1)

$$y=f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-4/x^2}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\{y-x\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3}{x^2-4}-x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{4x}{x^2-4}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{4/x}{1-4/x^2}\right\}=0$$

$x\to\infty$　方向の漸近線は　$y=x$

(例題 2)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

変形して　$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$　ここでは+の関数　$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$　の漸近線を求める。

-の関数についても同様である。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-\left(\frac{b}{a}x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

$x\to\infty$　方向の漸近線は　$y=\frac{b}{a}x$