3次方程式の解の公式

作成日付2016年11月24日

2次方程式の解の公式を扱うような感覚で3次方程式の解の公式を使えたら便利だろう。しかし、この公式は複素数の3乗根などが現われて試験では使いにくい。この稿の目的は公式を導く過程を高校数学の範囲内で扱い、3次方程式の解を求める方法を示すことである。複素数の3乗根の計算を2重根号をはずす問題としてとらえ直した。そして複素数を極形式にすることで2重根号が外せない場合の解の表現を示した。

例題では因数定理で解を求められる。この稿で示した解法と因数定理による解の比較をすることで理解が深まるだろう。因数定理で求められない場合にはこの稿が役立つ。ここでは一つの実数解だけを求めた。残りの解は因数分解から2次方程式にすることで求められる。

因数分解の公式: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

証明(左辺)$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=(a+b+c)((a+b)^2-(a+b)^c+c^2)-3ab(a+b+c)=$(右辺)

因数分解の公式より$\boldsymbol{X^3-3bcX+b^3+c^3}=(X+b+c)(X^2-(b+c)X+b^2+c^2-bc)$・・・(A)

3次方程式 $\boldsymbol{F(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0}$の解法

[step 1]両辺をaで割って$F(x)/a=x^3+Ax^2+Bx+C=0$とする。解は変わらない。

[step 2]変数変換$x=X-A/3$により$F(X-A/3)/a=\boldsymbol{X^3+3X+2q}=0$・・・①

[step 3]公式(A)の左辺と①の係数を比較して等しいとする。

$$\begin{array}{ll}\boldsymbol{X^3-3bcX+b^3+c^3}=0 & \Rightarrow\ b^3c^3=-p^3\ \ (-bc=p\ \text{より}\ )\\ \boldsymbol{X^3+3pX+2q}=0 & \quad\ b^3+c^3=2q\end{array}$$

[step 4]b^3, c^3を解に持つ2次方程式$\boldsymbol{t^2-2qt-p^3=0}$・・・②(分解方程式という)を解く。

[step 5]②の解をw_1, w_2とおく。$b^3=w_1=q+\sqrt{q^2+p^3}, c^3=w_2=q-\sqrt{q^2+p^3}$・・・③

(A)より①の解は$X=-(b+c)=-(w_1^{1/3}+w_2^{1/3})\Rightarrow F(x)=0$の解は$x=X-A/3$

解説 $f(x)=F(x)/a=x^3+Ax^2+Bx+C$ の2階導関数は$f''(x)=6x+2A$ である。

$f''(x)=0$のただ1つの解$x=-A/3$は変曲点のx座標である。

このグラフをx方向へ$+A/3$だけ平行移動すると変曲点のx座標がゼロとなる。

新しいグラフを$y=f(x-A/3)=x^3+rx^2+3px+2q$とおくと変曲点の$x$座標$=0$より$r=0$

$f(x-A/3)=x^3+3px+2q=0$・・・この解に$-A/3$を加えれば元の方程式の解になる。

実用性 ③の2重根号がはずせるかどうかが問題になる。q^2+p^3の符号の正負によってに③が実数も複素数にもなるが、以下の説明はどちらでも成立する。

$\sqrt{q^2+p^3}=m\sqrt{n}$の形で根号を最簡単化し、

$q\pm\sqrt{q^2+p^3}=q\pm m\sqrt{n}=(M\pm N\sqrt{n})^3$が成り立つ$M, N$を探索する。

$(M\pm N\sqrt{n})^3=M(M^2+3N^2n)\pm N(3M^2+N^2n)\sqrt{n}=q\pm m\sqrt{n}$

として$\sqrt{n}$の係数を比較すると$q=M(M^2+3N^2n), m=N(3M^2+N^2n)$

これよりMはqの約数の中から、Nはmの約数の中から探索すればよい。

これで見つからない場合は2重根号ははずせないことになる。

③が複素数の時は、余弦を使った解の表現がある。

$w_1=a+bi$を極形式で表すと$r=\sqrt{a^2+b^2}, \tan\theta=b/a$として$w_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

オイラーの公式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$を使えば$w_1=re^{(i\theta+2n\pi)}, w_2=\bar{w}=re^{i(-\theta+2n\pi)}$, ($n$は整数)

$\Rightarrow b, c=w_1^{1/3}, w_2^{1/3}=\sqrt[3]{r}e^{i(\pm\theta+2n\pi)/3}$

$\Rightarrow$①の解$-(b+c)=-(w^{1/3}+\bar{w}^{1/3})=-2\sqrt[3]{r}\cos((\theta+2\mathrm{n}\pi)/3)$

(練習問題 1) $4x^3+3x-2=0 \Rightarrow x^3+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$, $x^3-3bcx+b^3+c^3$と係数比較して

$bc=-\dfrac{1}{4}$, $b^3+c^3=-\dfrac{1}{2}$ ここで$b=\dfrac{B}{2}$, $c=\dfrac{C}{2}$とおくと$B^3+C^3=-4$, $B^3C^3=-1$

分解方程式は$t^2+4t-1=0 \Rightarrow B^3, C^3=-2\pm\sqrt{5}$

2重根号解除の探索は$(-1\pm\sqrt{5})^3=8(-2\pm\sqrt{5})$より$B, C=\sqrt[3]{(-2\pm\sqrt{5})}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

解$=-(b+c)=-(B+C)/2=1/2$

(練習問題 2) $x^3-5x^2+4=0$

変曲点の代わりに$x=\dfrac{1}{X}$と変換して、$X^3-\dfrac{5}{4}X+\dfrac{1}{4}=0$ $X^3-3bcX+b^3+c^3$と係数比較

$bc=\dfrac{5}{12}$, $b^3+c^3=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{B}{2}$, $c=\dfrac{C}{2}$とおいて$B^3C^3=\dfrac{125}{27}$, $B^3+C^3=2$

分解方程式は$t^2-2t+\dfrac{125}{27}=0 \Rightarrow B^3, C^3=\dfrac{9\pm7\sqrt{-6}}{9}$

2重根号解除の探索は$(-3\pm\sqrt{-6})^3=3(9\pm7\sqrt{-6})$より$B, C=\sqrt[3]{\dfrac{9\pm7\sqrt{-6}}{9}}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-6}}{3}$

解$=-(b+c)=-\dfrac{(B+C)}{2}=1$ 元の方程式の解は$1/1=1$

(練習問題 3) $x^3-6x+4=0$, $x^3-3bcx+b^3+c^3$と係数比較して$bc=2$, $b^3+c^3=4$

分解方程式は$t^2-4t+8=0 \Rightarrow b^3, c^3=2(1\pm\sqrt{-1})$

2重根号解除の探索は$(1\pm\sqrt{-1})^3=-2(1\mp\sqrt{-1})$より

$b, c=\sqrt[3]{2(1\pm\sqrt{-1})}=\sqrt[3]{-(1\mp\sqrt{-1})^3}=-(1\mp\sqrt{-1})=-1\pm\sqrt{-1} \Rightarrow x=-(b+c)=2$

(別解) $b^3, c^3=2(1\pm\sqrt{-1})=2\sqrt{2}\exp(\pm i(\dfrac{\pi}{4}+2n\pi))=2^{3/2}\exp(\pm i\dfrac{(8n+1)}{4}\pi)$

($n=1$とおくと) 解$=-2\times2^{1/2}\cos(\dfrac{8n+1}{12}\pi)=-2\times\sqrt{2}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=2$

(練習問題 4) $F(x)=x^3-2x^2+x+4=0$ 変曲点のx座標は$x=2/3$

$f(x)=F(x+2/3)=x^3-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{110}{27}=0$を解く。$x^3-3bcx+b^3+c^3$と係数比較して

$-3bc=-13$, $b^3+c^3=\dfrac{110}{27}$, $b=\dfrac{B}{3}$, $c=\dfrac{C}{3}$とおくと$BC=1$, $B^3+C^3=110$

分解方程式は$t^2-110t+1=0 \Rightarrow B^3, C^3=55\pm12\sqrt{21}$

2重根号解除は$(5\pm\sqrt{21})^3=8(55\pm12\sqrt{21})$より$B, C=\sqrt[3]{55\pm12\sqrt{21}}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$f(x)=0$の解$=-(b+c)=-(B+C)/3=-5/3$, $F(x)=0$の解は$-5/3+2/3=-1$

(練習問題 5) $F(x)=x^3+3x^2+3x-1=0$ これは有理数による因数定理では解けない。

変曲点は$x=-1$であり$f(x)=F(x-1)=0$の解は$F(x)=0$の解に-1を加えたものである。

$f(x)=x^3-2=0$ここから$x=\sqrt[3]{2}$がわかるが、解法も確認する。

$x^3-3bcx+b^3+c^3$と係数比較して$bc=0$, $b^3+c^3=-2$

分解方程式は$t^2+2t=0 \Rightarrow b^3=0$, $c^3=-2 \Rightarrow b=0$, $c=-\sqrt[3]{2}$より、

$f(x)=0$の解$=-(b+c)=\sqrt[3]{2} \Rightarrow F(x)=0$の解は$\sqrt[3]{2}-1$