更新日 2017 年 11 月 3 日

自然対数の底(ネイピア数)　$e=2.71828\cdots$　の存在証明

この稿の目的は数列　$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n=1,2,\cdots)$　の極限値が存在することの解説である。

次の十分条件を示す。(実数の公理と呼ばれる。)

「☆　$a_n \leq a_{n+1} \leq \alpha (n=1,2,\cdots)$　ならば 数列　$a_n (n=1,2,\cdots)$　は極限値を持つ」

これは　$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq \alpha$　より　a_n　の増加は　α　の手前で止まることを意味する。

同時にその極限値を計算する式を証明する。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

証明

$\displaystyle e_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$　とおく。　$e_n<e_{n+1}<3$　を以下で証明する。　$e_n<e_{n+1}$　は明らかである。

$$k\geq 1 \Rightarrow k!=k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1\geq 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot 1=2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$n\geq 2$　のとき　$\displaystyle e_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\leq 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2+\frac{1}{4}\,\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-(1/2)}<2+\frac{1}{2}$

以上より　e_n　は極限値を持つ。

(1) $a_n \leq e_n$　の証明

2項定理より　$\displaystyle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k}$

$$\frac{{}_nC_k}{n^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!\,n^k}=\frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(n-j)}{n^k}$$

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\leq n\cdot n\cdot n\cdots n=n^k$　だから　$\displaystyle\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\leq 1$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e_n$$

(2) $a_n<a_{n+1}$　の証明

$j=0,1,2,\cdots k-1$　に対して　$\displaystyle\frac{n+1-j}{n+1}-\frac{n-j}{n}=\frac{j}{n(n+1)}>0 \Rightarrow \frac{n+1-j}{n+1}>\frac{n-j}{n}$

$$\Rightarrow \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n+1-j}{n+1}\right)>\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{n-j}{n}\right)=\frac{{}_nC_k}{n^k} \Rightarrow a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}>\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k}=a_n$$

(1) (2)　より　a_n　は極限値を持ち　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}e_n$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e_n$　の証明

$$(n\geq p)\Rightarrow a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\geq\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n\geq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}=e_p \Rightarrow \lim_{p\to\infty}e_p\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}e_n$$

Copyright (C) 2017　Yuuichi Takaku All Rights Reserved.

以下に計算結果を示す。

n	a_n	e_n
4	2.4414062	2.7083333
5	2.4883200	2.7166666
6	2.5216263	2.7180555
7	2.5464996	2.7182539
8	2.5657845	2.7182787

$a_n > a_{n-1}$ の別証明

$f(x)=(1-x)^n-(1-nx) \quad (0<x<1)$ とおく。

このとき $0<1-x<1 \Rightarrow 0<(1-x)^n<1$ である。

$f'(x)=-n(1-x)^{n-1}+n=n(1-(1-x)^{n-1})>0$

$0<x<1$ では $f(x)$ は単調増加

$f(0)=0$ より $0<x<1$ では $f(x)>0 \Rightarrow (1-x)^n>1-nx \quad (0<x<1)$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n+1)^n}{n^n}\div\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}=\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}=\frac{n}{n-1}\frac{((n+1)(n-1))^n}{n^{2n}}=\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$>\frac{n}{n-1}\left(1-n\frac{1}{n^2}\right)=1$$

よって証明された。

Copyright (C) 2017 Yuuichi Takaku All Rights Reserved.