場合の数の公式について

更新日 2016 年 12 月 31 日

場合の数や確率の問題がわからないという声はよく聴かれる。場合の数では個数を求める要素全体の集合をある方法で上手に分割するという考え方が基礎になっている。例題を解く時に自然に会得されることが多いので、この考え方をはっきり書いたり読んだりする機会は少ない。しかし、中にはこれがうまく会得できないことが原因で時間ばかりが経過することもある。この稿では集合分割の基礎になっている考え方を説明する。大学の数学で「同値類」と呼ばれるものである。以下では集合の要素の数を有限とする。

グループ分けの意味

同値類とは集合をある特徴に注目してグループ分けすることである。

集合 A の要素 x の特徴を $P(x)$ と表す。

$x, y \in A$ について 特徴が同じなら $P(x)=P(y)$ であり x と y は仲間である。
特徴が違うなら $P(x)\neq P(y)$ であり x と y は仲間ではない。

$x\in A$ の仲間をすべて集めた集合を $\langle x\rangle$ と書く。この稿ではこれをグループと呼ぶ。

$\langle x\rangle=\langle y\rangle$ または $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=\emptyset$ のどちらかである。

また A のどの要素も所属するグループが一つだけある。これよりある $x_1, x_2, \cdots, x_N\in A$ から

$A=\langle x_1\rangle\cup\langle x_2\rangle\cup\cdots\cup\langle x_N\rangle$ かつ $\langle x_i\rangle\cap\langle x_j\rangle=\emptyset\ (i\neq j)$

場合の数の意味

場合の数とは、次の2つの意味のどちらかである。

(1) 集合 A の要素の個数。$\boldsymbol{n(A)}$ と書くがこの稿では $\boldsymbol{[A]}$ と書く。

(2) 集合 A をいくつかの部分集合へ重複ももれもなく分割した場合の部分集合の個数。

すなわち $A=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_N$ かつ $B_i\cap B_j=\emptyset\ (i\neq j)$ の時の N のこと。

特に $[B_1]=[B_2]=\cdots=[B_N]=M_B$ の場合が重要であり、この時 $\boldsymbol{[A]=N\times M_B}$ である。

$x\in A$ をその特徴 $P(x)$ によってグループ分けすれば、$x_1, x_2, \cdots, x_N\in A$ によって

$B_k=\langle x_k\rangle$ となり、$[\langle x_k\rangle]=M_B$ ならば $[A]=N\times M_B$

$\boldsymbol{n}$ 個の要素から $\boldsymbol{k}$ 個取り出して一列に並べた場合の数 $\boldsymbol{{}_nP_k}$ について

集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ の要素すべてを一列に並べたものを集合 A の要素とする。

$x\in A$ の特徴をその左端の k 個の並びとする。$M_B=[\langle x_k\rangle]=(n-k)!$ かつ $[A]=N\times M_B$ より

${}_nP_k=N=\dfrac{[A]}{M_B}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ である。

$\boldsymbol{n}$ 個の要素から $\boldsymbol{k}$ 個取り出す組み合わせの数 $\boldsymbol{{}_nC_k}$ について

S, A は先と同じとする。

$x\in A$ の特徴を左端の k 個の要素とする。$M_B=[\langle x_k\rangle]=k!\times(n-k)!$ かつ $[A]=N\times M_B$ より

${}_nC_k=N=\dfrac{[A]}{M_B}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

文字 $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{p}$ 個, 文字 $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{q}$ 個, 文字 $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{r}$ 個からなる文字列について

$S_a=\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}, S_b=\{b_1, b_2, \cdots, b_q\}, S_c=\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$

$S=S_a\cup S_b\cup S_c, n=p+q+r$ とおく。

S の要素 n 個を一列に並べたものを集合 A の要素とする。

$x\in A$ に対して S_a の要素を a, S_b の要素を b, S_c の要素を c に置き替えたものを $\bar{x}$ とする。

$x, y\in A$ が $\bar{x}=\bar{y}$ ならば x と y は仲間だと決める。

$M_B=[\langle x_k\rangle]=p!q!r!$ かつ $[A]=N\times M_B$ より $N=\dfrac{[A]}{M_B}=\dfrac{n!}{p!q!r!}$