惑星軌道

万有引力の法則から惑星軌道を求める。

時間 t 位置 $\vec{r}=(x,y)$ 速度 $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ 加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ 角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$

§A 惑星は1つの平面上を運動する。

惑星の速度 $\vec{v}$ と惑星に働く万有引力 $\vec{F}$ の両方を含む平面を α とすると、惑星は α 上を運動する。
これは「**原因が対称性をもつなら、結果も対称性をもつ**」という**対称性の原理**から導かれる。
惑星の運動の場合、運動方向を決める原因は $\vec{v}$ と $\vec{F}$ であり、結果は惑星の運動方向である。
α に関して系全体を対称移動させると、$\vec{v}$ と $\vec{F}$ は元の状態と重なるので対称性をもつ。
もし惑星が α から離れると仮定すると、それは α に関して対称的ではない。これは対称性の原理に矛盾するので、この仮定は誤りである。よって惑星は α から離れず、その上を運動する。

§B 極座標の直交単位ベクトル

惑星は平面上を運動するので、その平面内に直交座標と極座標を決める。
直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換 ($r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$ $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$)のために
$\vec{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta),\vec{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$ を定義する。

$|\vec{e}_r|=|\vec{e}_\theta|=1$ $\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta=0$ $\vec{r}=(r\cos\theta,r\sin\theta)=r\vec{e}_r$ $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}=\omega\vec{e}_\theta$ $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}=-\omega e_r$ が成り立つ。

[微分の計算]

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\theta,\sin\theta)=(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt},\cos\theta\frac{d\theta}{dt})=(-\omega\sin\theta,\omega\cos\theta)=\omega\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\frac{d}{dt}(-\sin\theta,\cos\theta)=(-\cos\theta\frac{d\theta}{dt},-\sin\theta\frac{d\theta}{dt})=(-\omega\cos\theta,-\omega\sin\theta)=-\omega e_r$$

§C 速度と加速度の極座標による表示

速度 $\vec{v}=\dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\omega\vec{e}_\theta$ ･･･(C-1)

加速度 $\vec{a}=(\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2)\vec{e}_r+(2\dfrac{dr}{dt}\omega+r\dfrac{d\omega}{dt})\vec{e}_\theta$ ･･･(C-2)

[計算]関数の積の微分より

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\boldsymbol{\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\omega\vec{e}_\theta} \quad \cdots(1)$$

(1)の第 1 項の微分

$$\frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r)=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt}=\boldsymbol{\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\omega\vec{e}_\theta} \quad \cdots(2)$$

(1)の第 2 項の微分

$$\frac{d}{dt}(r\omega\vec{e}_\theta)=\frac{dr}{dt}\vec{e}_\theta\omega+r\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\omega+r\vec{e}_\theta\frac{d\omega}{dt}=\frac{dr}{dt}\omega\vec{e}_\theta-r\omega^2\vec{e}_r+r\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta=\boldsymbol{-r\omega^2\vec{e}_r+(\frac{dr}{dt}\omega+r\frac{d\omega}{dt})\vec{e}_\theta} \quad \cdots(3)$$

(2)(3)より $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\boldsymbol{(\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2)\vec{e}_r+(2\dfrac{dr}{dt}\omega+r\dfrac{d\omega}{dt})\vec{e}_\theta}$

§D 万有引力の法則を解く

万有引力 $-\dfrac{GMm}{r^2}\vec{e}_r=m\vec{a}$ に(C-2)を代入して次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2}=\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2 & \cdots(D-1) \\ 0=2\dfrac{dr}{dt}\omega+r\dfrac{d\omega}{dt} & \cdots(D-2) \end{cases}$$

ケプラー第2法則 面積速度 $d(\dfrac{1}{2}r^2\theta)/dt=$一定 を参考に(D-2)の両辺に r をかけて解くと、

$$0=2r\frac{dr}{dt}\omega+r^2\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}(r^2\omega) \ \rightarrow\ r^2\omega=C \ (\text{定数}) \rightarrow\ \omega=\frac{C}{r^2} \quad \cdots(1)$$

Copyright (C) 2020 Yuuichi Takaku All Rights Reserved.

(1)より F を一般の t の関数とすると $\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dF}{d\theta}\omega=\frac{C}{r^2}\frac{dF}{d\theta} \rightarrow \frac{dF}{dt}=\frac{C}{r^2}\frac{dF}{d\theta}$

$F=r$ の時 $\frac{dr}{dt}=\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$ $F=\frac{dr}{dt}$ の時 $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{dr}{dt})=\frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta})=\frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta})$ ・・・(2)

(1)(2)を(C−1)に代入すると $-\frac{GM}{r^2}=\frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta})-r\frac{C^2}{r^4} \rightarrow -\frac{GM}{C^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta})-\frac{1}{r}$ ・・・(3)

ここで $u=\frac{1}{r}$ とおくと $\frac{dr}{d\theta}=\frac{d(u^{-1})}{d\theta}=-u^{-2}\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$

(3)に代入して $-\frac{GM}{C^2}=\frac{d}{d\theta}(u^2(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}))-u \rightarrow \frac{GM}{C^2}=\frac{d^2u}{d\theta^2}+u$

この微分方程式の一般解は $u=\frac{GM}{C^2}+A\cos\theta+B\sin\theta$ ・・・(4)

$\theta=0$ の時 r が最少値と決めると、この時 u は最大になるから θ に関して u は上に凸となる。

$\frac{du}{d\theta}=0 \rightarrow -A\sin 0+B\cos 0=0 \rightarrow B=0$

$\frac{d^2u}{d\theta^2}<0 \rightarrow -A\cos 0-B\sin 0<0 \rightarrow A>0$

(4)に代入して $\frac{1}{r}=\frac{GM}{C^2}+A\cos\theta \rightarrow r=\frac{1}{\frac{GM}{C^2}+A\cos\theta}=\frac{1}{\frac{GM}{C^2}(1+\frac{C^2A}{GM}\cos\theta)}=\frac{\frac{C^2}{GM}}{1+\frac{C^2A}{GM}\cos\theta}$

$e=\frac{C^2A}{GM}$, $a=\frac{1}{A}$ とおくと $r=\frac{ea}{1+e\cos\theta}$ これは2次曲線の極方程式である。

2次曲線は e によって次の3通りに分けられる。

- $0<e<1$ の時、極方程式は楕円を表す。
- $e=1$ の時、極方程式は放物線を表す。
- $0<e<1$ の時、極方程式は双曲線を表す。

Copyright (C) 2020 Yuuichi Takaku All Rights Reserved.