正多面体

更新日 2017 年 5 月 8 日

次の二つの条件に合う凸多面体を正多面体という。
[1] 各面は合同な正多角形
[2] 各頂点に集まる面の数は等しい

◇正多面体の各面とその数を求めよう。
[1][2]より、その面を正 m 角形、一つの頂点に集まる面の数 n 個とする。 $(m \geq 3, n \geq 3)$
正 m 角形の内角の和は $180(m-2)$ より、一つの内角は $\dfrac{180(m-2)}{m}$ だから
一つの頂点に集まる内角の和についての条件は $n\dfrac{180(m-2)}{m}<360$
整理して解くと $(m-2)(n-2)<4 \ (m \geq 3, n \geq 3) \Rightarrow (m, n)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$

オイラーの多面体定理
穴のない多面体で頂点の数 $v(vertex)$, 辺の数 $e(edge)$, 面の数 $f(face)$ とすると
オイラーの多面体定理 $v-e+f=2 \cdots (A)$ が成立。これより正多面体の v, e, f を求める。

◇ 辺の数 e
隣り合う二つの面を決めると、それらが共有する辺が一つ決まり、
逆に辺を一つ決めると、それを共有する二つの面が決まる。
ひとつの面には m 個の辺があり、各辺を共有する他の面が合わせて m 個ある。
面の決め方が f 通り、その面と辺を共有するもう一つの面を選ぶ方法は m 通り。
それぞれの選び方により、共有する辺が一つ決まるから $e=\dfrac{fm}{2} \cdots (1)$

◇ 頂点の数 v
面を一つ決め、その中の頂点を一つ決めるというやり方で、頂点を選ぶ方法は fm 通り。
各頂点につき、面を決めるのは n 通りだから $v=\dfrac{fm}{n} \cdots (2)$

$(1)(2)$ を (A) に代入して整理すると $f=\dfrac{4n}{2m-nm+2n} \cdots (3)$

$(1),(2),(3)$ に (m, n) の値を代入すれば次の表を得る。

(m, n)	f (面の個数)	多面体の種類	面の図形	e (辺の個数)	v (頂点の個数)
$(3,3)$	4	正 4 面体	正 3 角形	6	4
$(3,4)$	8	正 8 面体	正 3 角形	12	6
$(3,5)$	20	正 20 面体	正 3 角形	30	12
$(4,3)$	6	正 6 面体	正方形	12	8
$(5,3)$	12	正 12 面体	正 5 角形	30	20