平方根の近似値を素早く計算する

作成日:2016年8月11日

自然数nについて$\sqrt{n}$の近似値を小数第1位まで計算する。

近似式　$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x$　($|x| \ll 1$)を使う

step 1　nに最も近いN^2(Nは自然数)を見つける。　$d=n-N^2$　とおくと　$n=N^2+d$

step 2 $\sqrt{n}=\sqrt{N^2+d}=N\sqrt{1+\frac{d}{N^2}} \fallingdotseq N\left(1+\frac{d}{2N^2}\right)$で近似値を計算する。

例

$\sqrt{2}(=1.4142135\cdots)=\sqrt{1+1}=\left(1+\frac{1}{2}\right)=1.5$　　　($\sqrt{2}$の時は精度がよくない。)

$\sqrt{3}(=1.7320508\cdots)=\sqrt{4-1}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=2\left(1-\frac{1}{8}\right)=1.75$

$\sqrt{5}(=2.2360679\cdots)=\sqrt{4+1}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}} \fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{8}\right)=2.25$

$\sqrt{6}(=2.4494897\cdots)=\sqrt{4+2}=2\sqrt{1+\frac{2}{4}} \fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{4}\right)=2.50$　($\sqrt{6}$の時は精度がよくない。)

$\sqrt{7}(=2.647513\cdots)=\sqrt{9-2}=3\sqrt{1-\frac{2}{9}} \fallingdotseq 3\left(1-\frac{1}{9}\right)=2.66$

$\sqrt{1000}(=31.622776\cdots)=\sqrt{1024-24}=32\sqrt{1-\frac{24}{1024}}=32\sqrt{1-\frac{3}{128}} \fallingdotseq 32\left(1-\frac{3}{256}\right)=31.625$

◆誤差について　$d=N^2-n$　を評価する不等式を求める。(以下　$n \geq 7, N \geq 3$　とする。)

$M^2<n<(M+1)^2$　の時、M^2と$(M+1)^2$の中点Cは　$C=\frac{M^2+(M+1)^2}{2}=M^2+M+\frac{1}{2}$

(1)$M^2<n<C$の時$N=M$　とおくと　$N^2<N^2+d<N^2+N+\frac{1}{2}$　となり　$0<d \leq N$

(2)$C<n<(N+1)^2$の時$N=M+1$　とおくと　$N^2>N^2+d>N^2-N+\frac{1}{2}$　となり　$0>d \geq -N$

(1)(2)より　$|d| \leq N$ ・・・(3)

$$\Delta(n)=N\left(1+\frac{d}{2N^2}\right)-\sqrt{n}=N+\frac{d}{2N}-\sqrt{n}=\frac{2N^2+d-2N\sqrt{n}}{2N}=\frac{N^2+n-2N\sqrt{n}}{2N}=\frac{(N-\sqrt{n})^2}{2N}$$

$$=\frac{(N^2-n)^2}{2N(n+\sqrt{n})^2}=\frac{d^2}{2N(n+\sqrt{n})^2} \leq \frac{N^2}{2N(n+\sqrt{n})^2}=\frac{N}{2(n+\sqrt{n})^2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{n}}{N}\right)(N+\sqrt{n})}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{N}=\sqrt{\frac{N^2+d}{N^2}}=\sqrt{1+\frac{d}{N^2}} \geq \sqrt{1-\frac{N}{N^2}} \geq \sqrt{1-\frac{1}{N}} \geq \sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}} \geq 0.81$$

$$\Delta(N)=\frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{n}}{N}\right)(N+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{2 \times 1.81 \times (3+\sqrt{7})} \leq 0.05$$

この方法で少数第1位までは求められる。小数第2位まで必要な場合は次のようにする。

$\sqrt{3}(=1.7320508\cdots)=\sqrt{\frac{300}{100}}=\frac{1}{10}\sqrt{300}=\frac{1}{10}\sqrt{289+11}=\frac{17}{10}\sqrt{1+\frac{11}{289}}=\frac{17}{10}\left(1+\frac{11}{578}\right)=1.7323$