等速円運動

半径 r の円周上を速さ v で等速円運動する。 角度 θ ,時間 t ,角速度 $\omega=\frac{\theta}{t}$ とすると

円周上の移動距離は弧の長さより $l=r\theta=r\omega t \rightarrow v=\frac{l}{t}=r\omega$ -(1)

位置ベクトルは $\vec{r}=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)=(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ （ $|\vec{r}|=r$ ）

微分を使って向心加速度を計算する

$\frac{d}{dt}(\cos\omega t)=-\omega\sin\omega t$ $\frac{d}{dt}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t$ より

速度ベクトルは $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(v_x,v_y)=(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$

加速度ベクトルは $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(a_x,a_y)=(-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)=-\omega^2(r\cos\omega t, r\sin\omega t)=-\omega^2\vec{r}$ (2)

(2)より、加速度の向きは円の中心方向で大きさは $a=|\vec{a}|=\omega^2|\vec{r}|=r\omega^2$ -(3) これを**向心加速度**という。

(1)(3)から ω を消去して $a=\frac{v^2}{r}$ -(4) 以上をまとめると

$$r=r$$
$$v=r\omega$$
$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

運動方程式 $\vec{F}=m\vec{a}$ に代入すると $\vec{F}=-m\omega^2\vec{r}$ 大きさは $F=ma=mr\omega^2=m\frac{v^2}{r}$ これを**向心力**という。

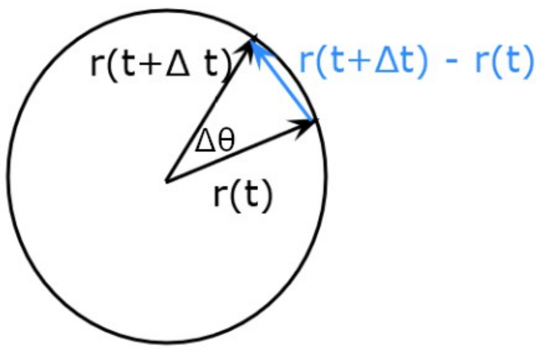
微分を使わないで向心加速度を計算する

$\vec{p}=(\cos\theta, \sin\theta)$ を原点を中心に反時計回りに 90°(= $\frac{\pi}{2}$ rad)回転させると

$\vec{p}_1=(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}), \sin(\theta+\frac{\pi}{2}))=(-\sin\theta, \cos\theta)$ -(A)

さらに反時計回りに 90°回転させると

$\vec{p}_2=(-\sin(\theta+\frac{\pi}{2}), \cos(\theta+\frac{\pi}{2}))=(-\cos\theta, -\sin\theta)=-\vec{p}$ -(B)



円周上を速度 v 、角速度 ω で等速円運動するとき、
時間 t から $t+\Delta t$ の間の移動距離は弧の長さ

$\Delta l=r\Delta\theta=r\omega\Delta t \rightarrow v=\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{r\omega\Delta t}{\Delta t}=r\omega$ -(1)

位置ベクトル $\vec{r}(t)=(r\cos\omega t, r\sin\omega t)=r(\cos\omega t, \sin\omega t)$ (2)

速度ベクトル $\vec{v}(t)=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$,

$\Delta t\rightarrow 0$ の時 $\vec{v}(t)$ の方向は $\vec{r}(t)$ を反時計回りに 90°回転させた方向となる。-(3)

(1)から $|\vec{v}|=v=r\omega$ -(4)

(A) (2) (3) (4) より $\vec{v}(t)=r\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)=\omega(r\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}), r\sin(\omega t+\frac{\pi}{2}))=\omega\vec{r}(t+\frac{\pi}{2})$ -(5)

加速度ベクトルは(5)より $\vec{a}(t)=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\omega\frac{\vec{r}((t+\frac{\pi}{2})+\Delta t)-\vec{r}(t+\frac{\pi}{2})}{\Delta t}=\omega\vec{v}(t+\frac{\pi}{2})$ -(6)

$\Delta t\rightarrow 0$ の時 $\vec{a}$ の方向は $\vec{v}$ を反時計回りに 90°回転させた方向となる。-(7)

(6)から $a=|\vec{a}|=\omega\left|\vec{v}(t+\frac{\pi}{2})\right|=\omega v$ -(8)

B (5)(6)(7)(8)より $\vec{a}=-\omega v\vec{r}$

(1)(8)をまとめると

$$v=r\omega$$
$$a=v\omega$$